ANÁLISIS ARMÓNICO - 2do. Cuatrimestre, 2016
Práctica 3 - Integrales singulares

Ejercicio 1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, y sea $f = g + b$ la descomposición de Calderón-Zygmund a altura $\lambda > 0$. Probar que

- $\|g\|_p^p \leq (2^n\lambda)^{p-1}\|f\|_1$
- $\|b\|_1 \leq 2\|f\|_1$
- $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |b| \leq \frac{2}{|Q_j|}\int_{Q_j} f$

Ejercicio 2. *Descomposición de Calderón-Zygmund en L^q*

Sea $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq q < \infty$ y sea $\lambda > 0$. Probar que existen funciones $g, b \in \mathbb{R}^n$ tales que

- $f = g + b$
- $\|g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^q}$ y $\|g\|_{L^\infty} \leq 2^{n/q}\lambda$
- $b = \sum b_j$, donde cada b_j está soportada en un cubo Q_j y los cubos Q_j y Q_k tienen interiores disjuntos si $j \neq k$.
- $\|b_j\|_{L^q}^q \leq 2^{n+q}\lambda^q|Q_j|$
- $\int_{Q_j} b_j(x)dx = 0$
- $\sum_j |Q_j| \leq \lambda^{-q}\|f\|_{L^q}^q$
- $\|b\|_{L^q} \leq 2^{(n+q)/q}\|f\|_{L^q}$ y $\|b\|_{L^1} \leq 2^{(n+q)/q}\lambda^{1-q}\|f\|_{L^q}^q$

Ejercicio 3. *Lema de Calderón-Zygmund vía la descomposición de Whitney*

Sean
$$F = \{x : Mf(x) \leq \lambda\} \quad , \quad \Omega = \{x : Mf(x) > \lambda\}$$
y sea $\Omega = \cup_k Q_k$ la descomposición de Whitney. Probar que entonces existe una constante A tal que:

- $f(x) \leq \lambda$ para casi todo $x \in F$
- $\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f\,dx \leq A\lambda$

Mostrar con un ejemplo que, a diferencia de la construcción original de Calderón-Zygmund, con esta construcción no necesariamente existe una constante B tal que $B\lambda < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f\,dx$ para todo k. Observar que, sin embargo, sí existe C tal que vale la estimación $|\Omega| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$.

Ejercicio 4. Sea $h \in C^1(\mathbb{R}^n - \{0\})$ homogénea de grado $1 - n$ y sea k^i el núcleo de Calderón-Zygmund dado por $k^i = D_i h$. Probar que si f es una función medible, acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, entonces $h * f$, tiene derivadas en sentido distribucional dadas por
$$D_i(h * f) = k^i * f + c_i f$$
donde $c_i = \int_{S^{n-1}} h(\sigma)\sigma_i\,d\sigma$ y que además
$$\|D_i(h * f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
con C que depende sólo de h.

Ejercicio 5. Estudiar la continuidad del operador

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} K(y)f(x-y)\,dy$$

siendo

$$K(x)=\int_0^\infty \frac{1}{t^{n+1}}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\,dt$$

donde $\varphi\in C_0^1(B(0,1))$ y $\int\varphi=0$.

Ejercicio 6. Probar que si K satisface las condiciones

$$\int_{|x|\geq 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,dx\leq B \qquad (|y|>0)$$

y

$$\int_{R_1\leq|x|\leq R_2} K(x)\,dx=0 \qquad (0<R_1<R_2<\infty)$$

entonces $K_\epsilon(x)=K(x)\chi_{\{|x|\geq\epsilon\}}(x)$ satisface las mismas condiciones con cota CB, donde C depende sólo de la dimensión.

Ejercicio 7. Sea Ω homogéneo de grado 0 e integrable en la esfera unitaria con integral cero. Probar que si se cumple la condición de Dini,

$$\int_0^1 \omega_1(\Omega,t)\frac{dt}{t}<\infty$$

donde

$$\omega_1(\Omega,t)=\sup_{h\in\mathbb{R}^n,|h|\leq t}\int_{\sigma=1}\left|\Omega\left(\frac{x}{|x|}+h\right)-\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|\,d\sigma$$

entonces $K(x)=\Omega(x)|x|^{-n}$ satisface la condición de Hörmander

$$\int_{|x|>2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,dx\leq B$$

Probar que si además Ω es impar, entonces la extensión a $L^2(\mathbb{R}^n)$ del operador

$$Tf(x)=v.p\int\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\,dy$$

puede escribirse en términos de la transformada de Fourier como $(Tf)\hat{}(\xi)=\hat{f}(\xi)m(\xi)$ con

$$m(\xi)=-\frac{\pi i}{2}\int_{|\sigma|=1}\Omega(\sigma)sign(\sigma\cdot\xi)\,d\sigma$$

Ejercicio 8. *(Método de las rotaciones)*

Notación: si $x\in\mathbb{R}^n$, $x=|x|x'$ con $x'\in S^{n-1}$.

Sea $k(x)=\Omega(x')/|x|^n$, con Ω impar, homogéneo de grado cero y $\int_{S^{n-1}}|\Omega(x')|\,dx'<\infty$ y sea

$$K_\varepsilon f(x)=\int_{|y|>\varepsilon} f(x-y)k(y)\,dy.$$

- Probar que

$$K_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(y') \int_{|r|>\varepsilon} \frac{f(x-ry')}{r}\, dr\, dy \qquad (*)$$

- Observar que para cada y' fijo, todo $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir como $x = z + sy'$ con $s \in \mathbb{R}$ y z en el hiperplano ortogonal a y' que pasa por el origen, y que fijados z e y' la integral interior de $(*)$ es una transformada de Hilbert truncada.
- Usando lo anterior, deducir que K_ε es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, y existe $C = C(n,p)$ independiente de ε y f tal que $\|K_\varepsilon f\|_p \leq C\|f\|_p$.

Ejercicio 9. *(Desigualdad de Korn)*
Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ acotado y $v \in (W_0^{1,p}(\Omega))^n$ $(1 < p < \infty)$ y sean

$$\epsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

- Verificar que vale

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i}$$

- Si se define el operador $\Lambda = \sum_{j=1}^n R_j(\partial/\partial x_j)$, donde R_j son las transformadas de Riesz, probar que vale

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \Lambda R_j \quad \text{y} \quad \Lambda R_j = R_j \Lambda$$

- Probar que vale

$$\Lambda R_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \Lambda(R_k \epsilon_{ij} + R_j \epsilon_{ik} - R_i \epsilon_{jk})$$

- A partir de la igualdad anterior, probar que vale

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \sum_k R_k R_j \epsilon_{jk} - \sum_k R_k R_i \epsilon_{ik}$$

- Deducir que

$$\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{L^p} \leq C(\|\epsilon_{ij}\|_{L^p} + \sum_k \|\epsilon_{jk}\|_{L^p} + \sum_k \|\epsilon_{ik}\|_{L^p})$$

- Concluir que vale la desigualdad de Korn: en las condiciones anteriores existe una constante C independiente de v tal que

$$\sum_{i,j} \int_\Omega \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^p dx \leq C \sum_{i,j} \int_\Omega |\epsilon_{ij}(v)|^p\, dx$$