ANALISIS ARMONICO - 2do. Cuatrimestre, 2016
Práctica 2 - Transformadas de Fourier y de Hilbert

Notación: dada f medible en $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, y $a > 0$, notamos los operadores de traslación, diltación y reflexión como:

$$\tau^y(f)(x) = f(x-y)$$
$$\delta^a(f)(x) = f(ax)$$
$$\tilde{f}(x) = f(-x)$$

Ejercicio 1. Probar que dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), y \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{C}, \alpha$ un multiindice, y $a > 0$, valen las siguientes propiedades

- $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$
- $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$
- $\widehat{bf} = b\hat{f}$
- $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}}$
- $\widehat{\tau^y(f)}(\xi) = e^{-2\pi i y\cdot\xi}(\hat{f})(\xi)$
- $(e^{2\pi i x\cdot y}f(x))\widehat{\ }(\xi) = \tau^y(\hat{f})(\xi)$
- $\delta^a(f)\widehat{\ } = a^{-n}\delta^{a^{-1}}(\hat{f}) = (\hat{f})_a$
- $(\partial^\alpha f)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$
- $(\partial^\alpha \hat{f})(\xi) = ((-2\pi i x)^\alpha f(x))\widehat{\ }(\xi)$
- $\hat{f} \in \mathcal{S}$
- $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$
- $\widehat{f \circ A}(\xi) = \hat{f}(A\xi)$, para toda matriz A ortogonal y todo vector columna ξ.

Ejercicio 2. *Desigualdad de Hausdorff-Young*
Probar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}} \leq C\|f\|_{L^p}$$

(se puede ver que $C = 1$ si en lugar del teorema de Marcinkiewicz se usa otro método de interpolación).

Ejercicio 3. *Lema de Riemann-Lebesgue*
Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $|\hat{f}(\xi)| \to 0$ cuando $|\xi| \to \infty$.

Ejercicio 4. Sean $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ y

$$g = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Probar que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi} \quad \text{y} \quad \hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2.$$

Ejercicio 5. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que para algún $0 < \alpha < 1$

$$\hat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\right) \qquad (|\xi| \to \infty).$$

Probar que entonces f satisface una condición de Hölder de orden α, es decir,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|^\alpha$$

para algún $M > 0$ y para todo $x, h \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: usar la fórmula de inversión de Fourier para escribir $f(x+h) - f(x)$ como una integral que involucre a $\hat{f}$ y estimar por separado la integral para $|\xi| \leq 1/|h|$ y $|\xi| \geq 1/|h|$).

Ejercicio 6. Probar que la transformada de Fourier de una función radial es radial, y que los productos y convoluciones de funciones radiales son radiales.

Ejercicio 7. *Ejemplo de funciones de soporte compacto en* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

- Sean $a < b$ y f tal que $f(x) = 0$ si $x \leq a$ o $x \geq b$ y
$$f(x) = e^{-1/(x-a)} e^{-1/(b-x)} \qquad \text{si } a < x < b.$$
Mostrar que f es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$.
- Probar que existe una función F infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $F(x) = 0$ si $x \leq a$, $F(x) = 1$ si $x \geq b$ y F es estrictamente creciente en $[a, b]$.
- Sea $\delta > 0$ suficientemente chico para que valga $a + \delta < b - \delta$. Probar que existe una función g infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = 0$ si $x \leq a$ o $x \geq b$, $g = 1$ en $[a + \delta, b - \delta]$ y g es estrictamente monótona en $[a, a + \delta]$ y $[b - \delta, b]$.

Ejercicio 8. *Autovalores de la transformada de Fourier*

- Probar que si $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, entonces $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$.
- Probar que los autovalores de la transformada de Fourier son $-1, 1, -i, i$. (Sugerencia: tener el cuenta el ítem anterior y probar que se pueden elegir a, b, c, d apropiados para que $xe^{-\pi x^2}$, $(a + bx^2)e^{-\pi x^2}$, $(cx + dx^3)e^{-\pi x^2}$ sean autofunciones).

Ejercicio 9. *Demostración alternativa del teorema de Weierstrass*

Sean L_n los núcleos de Landau, dados por
$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{c_n} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$
donde c_n es tal que $\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x)\, dx = 1$. Probar que si f es una función continua soportada en $[-1/2, 1/2]$, entonces $(f * L_n)(x)$ es una sucesión de polinomios en $[-1/2, 1/2]$ que converge uniformemente a f. (Sugerencia: probar primero que $c_n \geq 2/(n + 1)$).

Ejercicio 10. Probar que
$$H(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x-a|}{|x-b|}$$

Ejercicio 11. Probar que
$$H(e^{-x^2}) = \sqrt{\pi} e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Ejercicio 12. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $Hf \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\int f = 0$

Ejercicio 13. Sea T un operador acotado en $L^2(\mathbb{R})$ que satisface las siguientes propiedades:

- T conmuta con traslaciones.
- T conmuta con dilataciones positivas.
- T anticonmuta con la reflexión $f(x) \to f(-x)$.

Probar que entonces T es la transformada de Hilbert por una constante.