

ALGEBRA LINEAL - Práctica N°7 - Segundo Cuatrimestre de 2016

Nota: Si $f : V \rightarrow V$ es una transformación lineal y λ un autovalor de f denotamos por E_λ al autoespacio asociado a λ . Es decir, $E_\lambda := \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$.

Forma de Jordan

1. Sea f un endomorfismo del K -espacio vectorial V y $n \geq 1$. Sea $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ linealmente independiente tal que $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \cap \text{Nu}(f^n) = \{0\}$.

Probar que $\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ es linealmente independiente y

$$\langle f(v_1), \dots, f(v_k) \rangle \cap \text{Nu}(f^{n-1}) = \{0\}.$$

2. Dadas las matrices A y A' en $K^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A' .
- b) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tal que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A' .
- c) Sea B una base de K^n y sea $f : K^n \rightarrow K^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f -invariantes S y T de K^n tales que $K^n = S \oplus T$.

3. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Sean A_i ($1 \leq i \leq 6$) matrices en $\mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i}(X) = X^3$ ($1 \leq i \leq 6$). ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?
5. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7 \times 7}$?
6. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

7. a) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- b) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ tal que $m_A(X) = X^5$, $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una tal A .
8. Sea $f : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de \mathbb{C}^7 tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Hallar \mathcal{X}_f y m_f .
- b) Sean λ un autovalor de f y $m = \text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f)$ su multiplicidad en el polinomio característico. Sea $V_\lambda := \{v \in \mathbb{C}^7 / (\lambda \text{Id} - f)^m(v) = 0\}$, ¿para qué autovalores λ de f se tiene que $E_\lambda = V_\lambda$?
- c) Para cada autovalor λ de f , ¿cuál es la menor potencia k tal que $V_\lambda = \text{Nu}((\lambda \text{Id} - f)^k)$?
- d) Si λ es un autovalor de f , se nota f_λ a la restricción de $\lambda \text{Id} - f$ a V_λ . Calcular $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$ y $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$ para cada λ .
9. Sea V un K -espacio vectorial, sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal y sea $P \in K[X]$.
- a) Probar que $\text{Nu}(P(f))$ e $\text{Im}(P(f))$ son subespacios invariantes por f .
- b) Probar que si un autovalor λ de f es raíz de P , entonces $E_\lambda \subseteq \text{Nu}(P(f))$.
- c) Probar que si un autovalor λ de f no es raíz de P , entonces $E_\lambda \subseteq \text{Im}(P(f))$.
10. Hallar la forma y una base de Jordan de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Para cada $a \in \mathbb{R}$, calcular \mathcal{X}_A , m_A y hallar la forma de Jordan de A .
- b) Para $a = 2$, hallar una base de Jordan para A .

12. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $D : V \rightarrow V$ la transformación lineal definida por $D(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para D .

13. Sea A una matriz compleja de $n \times n$. Para todo $m \geq 1$ probar que

$$\frac{\text{rg}(A^{m+1}) + \text{rg}(A^{m-1})}{2} \geq \text{rg}(A^m).$$

14. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

15. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A(X) = \mathcal{X}_B(X) = (X-1)^3(X-3)^2$ y $m_A(X) = m_B(X)$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B .

16. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$; $m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$

b) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5$; $m_A(X) = (X-7)^2$

c) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7$; $m_A(X) = (X-2)^3$

d) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4$; $m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$

17. Sea $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 , que verifica simultáneamente que

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id}) &= 13, & \text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id})^2 &= 11, & \text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id})^3 &= 10, & \text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id})^4 &= 10, \\ \text{rg}(A - \lambda_2 \text{Id}) &= 13, & \text{rg}(A - \lambda_2 \text{Id})^2 &= 11, & \text{rg}(A - \lambda_2 \text{Id})^3 &= 10, & \text{rg}(A - \lambda_2 \text{Id})^4 &= 9, \\ \text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id}) &= 13, & \text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id})^2 &= 12 & \text{y} & \text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id})^3 &= 11. \end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

18. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$ que verifica simultáneamente que

$$m_A(X) = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)^2(X - \lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j),$$

$$\text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id}) = 11, \quad \text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id})^2 = 10, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id}) = 12, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id})^2 = 10 \text{ y}$$

$$\text{rg}(A - \lambda_4 \text{Id}) = 13.$$

19. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tales que $A = (a_{ij})_{i,j}$ y $a_{ij} = x_i y_j$.

a) Calcular todos los autovalores y autovectores de A .

b) Calcular las posibles formas de Jordan de A . Comparar con el Ej. 16 de la Práctica 6.

20. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

21. Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ una matriz tal que $m_A(X) = X^6$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5 .

22. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ tal que $B^2 = A$.

23. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $J(\lambda, m) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ la matriz

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Calcular $J(\lambda, m)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.

Sugerencia: $J(\lambda, m) = \lambda \text{Id}_m + J(0, m)$.

b) Verificar que $\text{rg}(J(\lambda, m)^k - \lambda^k \text{Id}_m) = m - 1$ para $\lambda \neq 0$.

c) Si $\lambda \neq 0$, hallar la forma de Jordan de $J(\lambda, m)^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

24. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de forma recurrente como

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0). \end{cases}$$

Hallar el término general de la sucesión.

25. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_3'(t) = -x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$ y $x_3(0) = 1$.

26. Sean A y B matrices en $\mathbb{C}^{n \times n}$ con $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$, $m_A = m_B$ y tales que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ los rangos de $A - \lambda \text{Id}$ y $B - \lambda \text{Id}$ coinciden. Probar que A y B son semejantes si las raíces de \mathcal{X}_A tienen multiplicidad a lo sumo 6. Dar un contraejemplo si se suprime la hipótesis sobre las multiplicidades.

* 27. Consideremos $V = \mathbb{R}_n[X]$ como \mathbb{R} -espacio vectorial. Sean $D : V \rightarrow V$ la derivación y $T : V \rightarrow V$ la traslación, definidas por

$$D(f) := f' \quad \text{y} \quad T(f) := f(X + 1).$$

Probar que $\exp(D) = T$.