ALGEBRA LINEAL - Práctica N°6 - Segundo Cuatrimestre de 2016

Autovectores - Autovalores - Diagonalización

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$):

   i) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

   iv) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ v) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vi) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea U una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(B, U)$.

3. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal $\delta(f) := f'$. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

   i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

   ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. i) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Determinar todos los a, b y $c \in K$ para los que A es diagonalizable.

   ii) Probar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

6. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$ resulte diagonalizable.

7. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   i) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ donde F_i es el i-ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$).

   ii) Encontrar una matriz $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $P \cdot A \cdot P^{-1}$ sea diagonal.

   iii) Hallar la fórmula general para el término F_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

   iv) Se define la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0\,,\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \quad (\forall\ n \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

   Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

9. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

10. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones.

    i) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible $\Leftrightarrow$ 0 no es autovalor de A.

    ii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible, x autovector de $A \Rightarrow x$ autovector de A^{-1}.

    iii) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y n es impar $\Rightarrow A$ admite un autovalor real.

    iv) Si A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la suma de todos los autovalores de $A + B$ es igual a la suma de todos los autovalores de A y de B.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifica $A^2 + Id_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n es par.

12. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Sugerencia: Hallar una matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $C^{-1} . \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .C$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} . \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

13. Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene a $(1,-1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\mathcal{X}_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿A es única?

14. i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $\operatorname{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

    ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$. Si 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3Id_4$, hallar todos los autovalores de A.

15. i) Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\operatorname{Im}(f)) = s$. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿f es diagonalizable?

    ii) Sea K un cuerpo incluido en $\mathbb{C}$ y sea $f : K^n \to K^n$ un morfismo nilpotente. Calcular $\mathcal{X}_f$ y decidir si f es diagonalizable.

16. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\operatorname{Nu}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.

17. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f|_B$ es triangular superior.

18. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de $\mathcal{X}_A$ contadas con multiplicidad.

    i) Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

    ii) Probar que $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

19. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$.

    i) Probar que las matrices $\begin{pmatrix} A\cdot B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & B\cdot A \end{pmatrix}$ en $K^{(m+n)\times(m+n)}$ son semejantes.

    ii) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{A\cdot B} = \mathcal{X}_{B\cdot A}$.

20. *a*) Sea $A \in K^{n\times n}$ de rango 1. Probar que $\mathcal{X}_A(t) = t^{n-1}(t - \operatorname{tr}(A))$

    b) Hallar el determinante de

$$\begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}.$$

Polinomio minimal

21. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sean P y $Q \in K[X]$.

    i) Probar que:

       a) Si $a, b \in K$, $(a.P + b.Q)(A) = a.P(A) + b.Q(A)$.

       b) $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$.

    ii) ¿Es cierto que $P(A).Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ó $Q(A) = 0$?

    iii) Si P y Q coprimos y $x \in K^n$ es tal que $P(A).x = Q(A).x = 0$, probar que $x = 0$.

22. Sean $P \in \mathbb{C}[X]$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de $\mathcal{X}_A$ contadas con multiplicidad. Probar que $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$ son las raíces de $\mathcal{X}_{P(A)}$ contadas con multiplicidad.

23. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

    i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (a) $P(X) = X - 1$, (b) $P(X) = X^2 - 1$, (c) $P(X) = (X - 1)^2$.

    ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$; $P(X) = X^3 - iX^2 + 1 + i$.

24. Sean $A, B \in K^{n\times n}$. Probar que si A y B son semejantes, entonces $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Vale la recíproca?

25. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

26. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices y comparar con su polinomio característico:

    i) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

    viii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ix) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ x) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ xi) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

27. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

    i) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P' + 2P$

    ii) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^t$

28. Sea $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal $\delta(P) := P'$. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.

29. Sea $A \in K^{n\times n}$ la matriz compañera de $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$, es decir la matriz de la multiplicación por X en $K[X]/P(X)K[X]$.

    a) Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

    b) Supongamos que P tiene n raíces distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en K. Hallar una base de polinomios $\ell_1, \dots, \ell_n$ de grado $\leq n-1$ que sean autovectores.

    c) Hallar una base de autovectores para A^t cuando P tiene n raíces simples.

30. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

    i) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5Id_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

    ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    iii) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de Id_2.

    iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37Id_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de Id_2.

    v) Calcular $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

    vi) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

31. Sean V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En ese caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

32. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Si S y T son f-invariantes, probar que existe una base B de V y matrices $A_1 \in K^{s\times s}$ y $A_2 \in K^{t\times t}$ tales que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

    Probar que, en este caso, $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{A_1}.\mathcal{X}_{A_2}$. ¿Pasa lo mismo con los minimales?

33. i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3y,\ 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

    ii) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ. Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

¿g_θ es diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

34. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una tranformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

i) Probar que para cada $0 \leq i \leq n$ existe un subespacio S_i de $\mathbb{R}^n$ de dimensión i que es f-invariante.

ii) Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

35. i) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal diagonalizable. Si S es un subespacio de V f-invariante, probar que $f : S \to S$ es diagonalizable.

ii) Sean A, $B \in K^{n\times n}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$ y sea $E_\lambda = \{x \in K^n \,/\, Ax = \lambda.x\}$. Probar que E_λ es B-invariante.

iii) Sean A, $B \in K^{n\times n}$ dos matrices diagonalizables tales que $A \cdot B = B \cdot A$. Probar que existe $C \in \mathrm{GL}(n, K)$ tal que $C \cdot A \cdot C^{-1}$ y $C \cdot B \cdot C^{-1}$ son diagonales (es decir, A y B se pueden diagonalizar simultáneamente).

36. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices tales que $A \cdot B = B \cdot A$. Probar que existe $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $C \cdot A \cdot C^{-1}$ y $C \cdot B \cdot C^{-1}$ son triangulares superiormente.

37. i) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.

ii) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.

38. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcular todos los autovalores de A.

ii) Si $K = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es el 0, probar que A es nilpotente. ¿Qué pasa si $K = \mathbb{R}$?

39. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A es nilpotente si y sólo si $\mathrm{tr}(A^k) = 0$, para todo $k = 1, \ldots, n$.

40. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de traza nula. Probar que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.

∗ 41. i) Sean $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices cuadradas arbitrarias. Probar que existen $B', C' \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tales que $BC - CB = B'C' - C'B'$.

ii) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de traza nula. Probar que existen $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A = BC - CB$. (Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

∗ 42. Sean $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.

a) Hallar el determinante de

$$\mathrm{C}(a_0, \dots, a_{n-1}) := \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_4 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & a_0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

llamado *determinante cíclico* de orden n. (Sugerencia: Ejercicios 29 y 22.)

b) Hallar el determinante de

$$\mathrm{H}(a_0, \dots, a_{n-1}) := \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ -a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 \\ -a_2 & -a_1 & a_0 & \dots & a_4 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-2} & -a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & a_0 & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & -a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

llamado *determinante hemicíclico* de orden n.

c) Probar que un determinante cíclico de orden $2n$ puede representarse como el producto de un determinante cíclico de orden n por uno hemicíclico de orden n.

∗ 43. Sea $\zeta_n \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima primitiva de 1. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices inversibles tales que $AB = \zeta_n BA$.

a) Probar que las únicas matrices que conmutan simultáneamente con A y B son escalares. (Sugerencia: recordar el Ejercicio 26 de la práctica 5.)

b) Probar que A^n y B^n son matrices escalares.

c) Supongamos que $A^n = B^n = I_n$. Probar que existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tal que CAC^{-1} es diagonal y CBC^{-1} es la matriz compañera del polinomio $X^n - 1$.

∗ 44. Sean $m, n \geq 1$ enteros y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ matrices. Las transformaciones lineales

$$L_A, R_B : \mathbb{C}^{n\times m} \to \mathbb{C}^{n\times m}$$

se definen por $L_A(X) = AX$ y $R_B(X) = XB$.

a) Probar que L_A y R_B conmutan.

b) Hallar el polinomio característico de L_A en función de $\mathcal{X}_A$.

c) Si A y B son diagonalizables, hallar los autovectores de $L_A - R_B$ en función de los de A y B.

d) Probar que la ecuación de Sylvester

$$AX - XB = Q \quad , \quad X \in \mathbb{C}^{n\times m}$$

tiene una única solución para todo $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$ si y sólo si los polinomios minimales de A y B son coprimos.

e) Hallar el polinomio característico de $L_A + R_B$ con A matriz compañera de $X^2 - 2$ y B matriz compañera de $X^2 - 3$. Comparar con el hallado en el Ejercicio 18 de la práctica 2 y el del 27 de la práctica 5.