

**ALGEBRA LINEAL - Práctica N°5 - Segundo Cuatrimestre de 2016****Determinante**

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \text{ii)} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{iv)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} & \text{v)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} & \text{vi)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Calcular el determinante de las matrices elementales definidas en el Ejercicio 19 de la Práctica 1.

3. i) Sea  $A \in K^{n \times n}$  una matriz triangular superior. Probar que  $\det(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$ .  
 ii) Calcular el determinante de  $A \in K^{n \times n}$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. i) Si  $A \in K^{n \times n}$ ,  $B \in K^{m \times m}$  y  $C \in K^{n \times m}$ , sea  $M \in K^{(n+m) \times (n+m)}$  la matriz de bloques definida por  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ . Probar que  $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$ .  
 ii) Sean  $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{N}$  y para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sea  $A_i \in K^{r_i \times r_i}$ . Se considera la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

Calcular  $\det(M)$ .

5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sea  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in K[X]$  un polinomio. Consideramos el endomorfismo  $m_X : K_{\leq n-1}[X] \rightarrow K_{\leq n-1}[X]$  dado por  $m_X(Q(X)) := r_P(XQ(X))$ , (la multiplicación por  $X$  módulo  $P$ ). Probar que la matriz de  $m_X$  en la base de monomios  $\{1, X, \dots, X^{n-1}\}$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Decimos que  $A$  es la *MATRIZ COMPAÑERA* del polinomio  $P$ . Probar que el determinante de  $t \cdot \text{Id} - A$  es igual a  $P(t)$ .

7. Calcular inductivamente el determinante de la matriz en  $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Dada la matriz de *Vandermonde*:

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

probar que  $\det(V(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i)$ .

Sugerencia: Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $k_i \neq k_j$  si  $i \neq j$ . Si se considera el determinante de  $V(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, X)$  como polinomio en  $X$ , probar que  $k_1, \dots, k_{n-1}$  son sus raíces y factorizarlo.

9. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix} \qquad \text{ii) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}$$

10. Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  distintos y no nulos. Probar que las funciones  $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ . Deducir que  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  no tiene dimensión finita.

Sugerencia: Derivar  $n - 1$  veces la función  $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$ .

11. i) Sean  $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Probar que la función  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-11} & v_{n-12} & \dots & v_{n-1n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

- ii) Probar que si  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  es linealmente independiente,  $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ = \langle \varphi \rangle$  (es decir,  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$  es una ecuación implícita para el subespacio  $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ ).

12. Sea  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ . Si  $\det(A) = 3$ , calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}.$$

13. Dadas las matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

probar que no existe ninguna matriz  $C \in GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $A.C = C.B$ . ¿Y si no se pide que  $C$  sea inversible?

14. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  y sea  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $B = (b_{ij})_{i,j}$ , una matriz tal que  $\det(A+B) = \det(A-B)$ . Probar que  $B$  es inversible si y sólo si  $b_{11} \neq b_{21}$ .

15. Sea  $A \in K^{n \times n}$  y sea  $\lambda \in K$ . Probar que existe  $x \in K^n$  ( $x \neq 0$ ) tal que  $A.x = \lambda.x$  si y sólo si,  $\det(A - \lambda.I_n) = 0$ .

16. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

17. Sea  $A$  una matriz inversible. Calcular  $\det(\text{adj } A)$ . ¿Qué pasa si  $A$  no es inversible?

18. i) Resolver los siguientes sistemas lineales sobre  $\mathbb{Q}$  empleando la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 3.x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 7.x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2.x_3 = 1 \\ 2.x_1 + x_2 + 4.x_3 = 2 \end{cases}$$

ii) Resolver el siguiente sistema lineal sobre  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  empleando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x + z = 6 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

19. Sea  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  tal que  $\det(A) = 1$  ó  $\det(A) = -1$ . Probar que para todo  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ , existe un único  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $A \cdot x = b$ .

20. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ . Se sabe que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{pmatrix} = 0, \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{pmatrix} = 0.$$

Calcular  $\det(A)$ .

21. i) Sea  $A \in K^{3 \times 3}$  no invertible tal que  $A_{11} \cdot A_{33} - A_{13} \cdot A_{31} \neq 0$ . Calcular la dimensión de  $S = \{x \in K^3 / A \cdot x = 0\}$ .

ii) Sea  $A \in K^{n \times n}$  no invertible tal que  $\text{adj}(A) \neq 0$ . Calcular  $\text{rg}(A)$  y  $\text{rg}(\text{adj}(A))$ .

22. i) Sea  $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{6 \times 6}$ . ¿Con qué signos aparecen los siguientes productos en  $\det(A)$ ?

a)  $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{14} \cdot a_{65}$

b)  $a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{51} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$

ii) Sea  $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{5 \times 5}$ . Elegir todos los posibles valores de  $j$  y de  $k$  tales que el producto  $a_{1j} \cdot a_{32} \cdot a_{4k} \cdot a_{25} \cdot a_{53}$  aparezca en  $\det(A)$  con signo  $+$ .

iii) Sea  $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{4 \times 4}$ . Escribir todos los términos de  $\det(A)$  que tengan al factor  $a_{23}$  y signo  $+$ .

iv) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de  $X^4$  y de  $X^3$  en

$$\det \begin{pmatrix} 2 \cdot X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}.$$

v) Sin calcular el determinante, calcular el coeficiente de  $a^6$  y el de  $b^6$  en

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Sean  $A, B, C, D \in K^{n \times n}$ . Sea  $M \in K^{2n \times 2n}$  la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si  $A \in GL(n, K)$ ,  $\det(M) = \det(A \cdot D - A \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B)$ . Si además  $A \cdot C = C \cdot A$  entonces  $\det(M) = \det(A \cdot D - C \cdot B)$ .

24. *Criterio de Minkowski.* Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que sus coordenadas diagonales son positivas, las demás negativas, y las sumas por filas son positivas. Probar que  $\det A \neq 0$ .
25. Sea  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz antisimétrica. Probar que  $I + M$  es invertible. Calcular  $\det((I - M)(I + M)^{-1})$ .
- \* 26. Sea  $\zeta_n \in \mathbb{C}$  una raíz  $n$ -ésima primitiva de 1. Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  matrices invertibles tales que

$$AB = \zeta_n BA.$$

Probar que los únicos subespacios simultáneamente invariantes por  $A$  y  $B$  son  $0$  y  $\mathbb{C}^n$ .

- \* 27. *Resultante de dos polinomios.* Sea  $K$  un cuerpo y  $f, g \in K[X]$  de grados  $m \geq 1$  y  $n \geq 1$  respectivamente. Se define la transformación lineal  $S_{f,g} : K_{n-1}[X] \times K_{m-1}[X] \rightarrow K_{n+m-1}[X]$  por

$$S_{f,g}(a(X), b(X)) := a(X)f(X) + b(X)g(X).$$

Sea  $E = \{1, X, \dots, X^{m+n-1}\}$  la base canónica de  $K_{n+m-1}[X]$  y

$$B = \{(1, 0), (X, 0), \dots, (X^{n-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{m-1})\}$$

una base de  $K_{n-1}[X] \times K_{m-1}[X]$ .

- Probar que  $S_{f,g}$  es un isomorfismo si y sólo si  $f$  y  $g$  son coprimos.
- Probar que  $f$  y  $g$  son coprimos si y sólo si

$$\text{Res}(f, g) := \det |S_{f,g}|_{BE}$$

es no nulo.

- Calcular la resultante  $\text{Res}_Y(Y^2 - 2, (X - Y)^2 - 3) \in \mathbb{C}[X]$  pensando a  $Y^2 - 2$  y  $(X - Y)^2 - 3$  como polinomios en  $Y$  con coeficientes en  $\mathbb{C}(X)$ . Comparar con el polinomio hallado en el Ejercicio 18 de la práctica 2.