ALGEBRA LINEAL - Práctica N°2 - Segundo Cuatrimestre de 2016

Espacios Vectoriales

1. Sea V un espacio vectorial sobre K, $k \in K$, $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $0v = \vec{0}$
   b) $k\vec{0} = \vec{0}$
   c) $(-1)v = -v$
   d) $-(-v) = v$
   e) $kv = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$
   f) $-\vec{0} = \vec{0}$

2. Probar en cada caso que el conjunto V con la suma y el producto por escalares definidos es un espacio vectorial sobre K.

   a) Dado X un conjunto, sea $V = K^X = \{f : X \to K$ tal que f es una función$\}$.
   $+ : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$
   $\cdot\, : (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \quad \forall\, x \in X$

   b) $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)/a_i \in K\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de K (donde K es un cuerpo cualquiera).
   $+$: $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$
   $\cdot$: $k \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (ka_i)_{i\in\mathbb{N}}$

   c) $V = \mathbb{R}_{>0}$, $K = \mathbb{Q}$.
   $\oplus : a \oplus b = ab$
   $\otimes$: $\frac{m}{n} \otimes a = \sqrt[n]{a^m}$

3. *a*) Sea $v \in \mathbb{R}^2$ un vector fijo. Se define la función $f_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

   $$f_v(x, y) = (x, y) + v$$

   Interpretar geométricamente el efecto de f_v sobre el plano (f_v se llama la *traslación en* v).

   b) Probar que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma $+_{(2,1)}$ y el producto por escalares $\cdot_{(2,1)}$ definidos de la siguiente forma:

   $$\begin{aligned} (x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= (x + x' - 2, y + y' - 1) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= r(x - 2, y - 1) + (2, 1) \end{aligned}$$

   (Este espacio se notará $\mathbb{R}^2_{(2,1)}$ para distinguirlo de $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual. La notación se basa en que el $(2, 1)$ resulta el neutro de la suma $+_{(2,1)}$).

   c) Interpretar geométricamente $+_{(2,1)}$ y $\cdot_{(2,1)}$, teniendo en cuenta que:

   $$\begin{aligned} (x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= f_{(2,1)}\big(f_{(-2,-1)}(x, y) + f_{(-2,-1)}(x', y')\big) \\ r \cdot_{(2,1)}(x, y) &= f_{(2,1)}\big(r \cdot f_{(-2,-1)}(x, y)\big) \end{aligned}$$

4. *a*) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.

   b) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

5. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como K-espacio vectorial:

   a) $S_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \,:\, v = a(1,0,0) + b(1,1,1)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}\,,\, V = \mathbb{R}^3\,,\, K = \mathbb{R}$.

   b) $S_2 = \{ai \,:\, a \in \mathbb{R}\}\,,\, V = \mathbb{C}\,,\, K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$.

   c) $S_3 = \{f \in K[X] \,:\, f = 0 \text{ ó } grf \geq 2\}\,,\, V = K[X]$.

   d) $S_4 = \{f \in K[X] \,:\, f = 0 \text{ ó } grf \leq 5\}\,,\, V = K[X]$.

   e) $S_5 = \{f \in K[X] \,:\, f'(1) = 0\} \quad V = K[X]$.

   f) $S_6 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,,\, V = \mathbb{R}^\mathbb{R}\,,\, K = \mathbb{R}$.

   g) Dados a y $b \in \mathbb{R}$ fijos, $S_7 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,:\, f'' + af' + bf = 0\}\,,\, V = \mathbb{R}^\mathbb{R}\,,\, K = \mathbb{R}$.

   h) $S_8 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,:\, \int_0^1 f(x)dx = 0\}\,,\, V = \mathbb{R}^\mathbb{R}\,,\, K = \mathbb{R}$.

   i) $S_9 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} \,:\, \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0\ \forall\, r \geq k\}\,,\, V = K^\mathbb{N}$.

   j) $S_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{(2,1)} \,:\, x + y = 3\}\,,\, V = \mathbb{R}^2_{(2,1)}\,,\, K = \mathbb{R}$.

6. Sea $A \in K^{n\times m}$ y sea $S = \{x \in K^m \,:\, Ax = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es A. Probar que S es un subespacio de K^m.

7. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V:

   a) Probar que $S \cap T$ es un subespacio de V.

   b) Encontrar S y T subespacios de $V = \mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.

   c) Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

8. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre K:

   a) K^n.

   b) $K_n[\mathrm{X}] = \{f \in K[X] \,:\, f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \leq n\}$.

   c) $K[\mathrm{X}]$.

   d) $K^{n\times n}$.

   e) $\mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{R}$.

   f) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y - z = 0\ ;\ x - y = 0\}\,, K = \mathbb{R}$.

   g) $S_2 = \{f \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \,:\, f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}\,, K = \mathbb{R}$.

   h) $S_3 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,:\, f''' = 0\}\,, K = \mathbb{R}$.

   i) $S_4 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3 \,:\, x + 2y + z = 0\}$, $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

9. Sea $S = <(1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1)> \ \subseteq \mathbb{R}^4$.

   a) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

   b) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

   c) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

10. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

    a) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v\,,\,w\,\in V$. Entonces $< v\,,\,w >=< v\,,\,w+5v >$.

    b) Sean $v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,v_4\,,\,w\,\in \mathbb{R}^7$ tales que $< v_1\,,\,v_2\,,\,w >=< v_3\,,\,v_4\,,\,w >$.
    Entonces $< v_1\,,\,v_2 >=< v_3\,,\,v_4 >$.

    c) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,w\,\in V$.
    $< v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,w >=< v_1\,,\,v_2\,,\,v_3 > \Longleftrightarrow w \in < v_1\,,\,v_2\,,\,v_3 >$.

11. Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,:\, f'' + f = 0\} =< \operatorname{sen} x\,,\,\cos x >$.
    (Sugerencia: Probar que si $f''+f=0$, entonces $\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)

12. Decidir si los siguientes vectores son linealmente independientes sobre K:

    a) $(1,2,3)\,,\,(2,3,1)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$, $K=\mathbb{R}$.

    b) $(1-i,i)\,,\,(2,-1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ para $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$.

    c) $(1-X)^3\,,\,(1-X)^2\,,\,1-X\,,\,1$ en $K[X]$.

    d) $f(x)=\operatorname{sen} x\,,\,g(x)=\cos x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K=\mathbb{R}$.

    e) $f(x)=e^x\,,\,g(x)=x\,,\,h(x)=e^{-x}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K=\mathbb{R}$

    f) $u=(1,0,1,0,1,\dots)\,,\,v=(0,1,0,1,0,\dots)\,,\,w=(1,1,0,1,1,0,\dots)$ en $K^{\mathbb{N}}$

    g) $\{I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2-1}\}$, con $A \in K^{n\times n}$, $n \geq 2$, K un cuerpo cualquiera.

13. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\{v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente en los siguientes casos:

    a) $\{(1,2,k)\,,\,(1,1,1)\,,\,(0,1,1-k)\}$.

    b) $\{(k,1,0)\,,\,(3,-1,2)\,,\,(k,2,-2)\}$.

    c) $\{kX^2+X\,,\,X^2-k\,,\,k^2X\} \subset \mathbb{R}[X]$.

    d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

14. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K-espacios vectoriales

    a) $< (1,4,-2,1)\,,\,(1,-3,-1,2)\,,\,(3,-8,-2,7) >$, $K=\mathbb{R}$.

    b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1+x_2+x_3+x_4=0\}, K=\mathbb{R}$.

    c) $\mathbb{C}$, $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$.

    d) $\{f \in \mathbb{R}[X] \,:\, f=0 \text{ ó } \operatorname{gr}(f) \leq 3 \text{ y } f(2)=f(-1)\}, K=\mathbb{R}$.

    e) $\{f \in \mathbb{R}[X] \,:\, f=0 \text{ ó } \operatorname{gr}(f) \leq 3 \text{ y } f \text{ es un múltiplo de } (x^2-2)\}, K=\mathbb{R}$.

    f) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}} \,:\, a_i = a_j \;\forall\, i,j\,\}$.

15. *a*) Probar que el conjunto $\{(1,0,0)\,,\,(0,i,0)\,,\,(1,1,i)\}$ es base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

b) Probar que el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

c) Probar que $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

16. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado:

    a) $\{(1,1,1,1)\,,\,(0,2,1,1)\}, V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$

    b) $\{X^3 - 2X + 1\,,\, X^3 + 3X\}, V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$.

    c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $V = \mathbb{C}^{2\times 2}, K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

17. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

    a) $S =< (1,1,2)\,,\,(1,3,5)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1) > \subseteq \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$.

    b) $S =< X^2 + 2X + 1\,,\, X^2 + 3X + 1\,,\, X + 2 > \subseteq \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$.

    c) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}, K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

18. Sea S el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial generado por $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$, y sea $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in S$. Sabiendo que $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ y α^4 pertenecen a S, hallar un polinomio de grado 4 con coeficientes racionales que tenga a α como raíz.

19. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

    a) $S =< (1,k,1)\,,\,(-1,k,1)\,,\,(0,1,k) > \subset \mathbb{R}^3$.

    b) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

    c) S $= \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, Ax = 0\}$ siendo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}.$$

20. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

    a) $< (-2,1,6), (3,0,-8) > = < (1,k,2k), (-1,-1,k^2-2), (1,1,k) >$.

    b) $S \cap T =< (0,1,1) >$, siendo $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = < (1,k,2), (-1,2,k) >$.

21. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa:

    a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \,:\, 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x,y,z)/x + z = 0\}$.

    b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \,:\, 3x - 2y + z = 0\,,\, x - y = 0\}$ y $T = < (1,1,0), (5,7,3) >$.

c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = < (1,1,3),(1,3,5),(6,12,24) >$ y $T = < (1,1,0),(3,2,1) >$.

d) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \,:\, f(1) = 0\}$ y $T = < 1\,,\,\mathrm{X}\,,\,\mathrm{X}^2\,,\,\mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}\,,\,\mathrm{X}^5 >$.

e) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \,:\, f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f'(0) = f''(0) = 0\}$.

22. *a*) Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n\times n}$ y calcular su dimensión.
    1) $S_1 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, A = A^t\}$ (matrices simétricas)
    2) $S_2 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)
    3) $S_3 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)
    4) $S_4 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)
    5) $S_5 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = \cdots = A_{nn}\}$ (matrices escalares)
    6) $S_6 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, tr(A) = 0\}$

    b) Probar que:
    1) $S_1 \oplus S_2 = K^{n\times n}$ si $2 \neq 0$ en K.
    2) $S_5 \oplus S_6 = K^{n\times n}$ si $K = \mathbb{Q}\,,\,\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

23. En cada uno de los siguientes casos caracterizar $S+T \subseteq V$ y determinar si la suma es directa.

    a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = < (1,1,1) >$, $T = < (2,-1,1),(3,0,2) >$.

    b) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \,:\, f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \leq 3\}$, $T = \{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, \mathrm{mult}(4,f) \geq 4\}$.

    c) $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$, $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3} \,:\, A_{11} + A_{21} = 0,\; 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\}$,
    $T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

24. Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,:\, f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,:\, f \text{ es constante}\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y que $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

25. Para cada S dado hallar $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso, T se dice un *complemento* de S con respecto a V):

    a) $S =< (1,2,-1,3)\,,\,(2,3,-2,1)\,,\,(0,1,0,7) >$, $V = \mathbb{R}^4$.

    b) $S = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \,:\, tr(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{4\times 4}$.

    c) $S =< 3, 1 + X^2 >$, $V = \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

26. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

    a) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3, \dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

    b) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5, \dim S = \dim T = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$.

27. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$):

    a) Probar que $\forall\, v \notin T$, $T \oplus < v >= V$.

b) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$.
Calcular $\dim(S \cap T)$.

c) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

28. Sean S, T y U subespacios de un K-espacio vectorial V tales que

$$S \cap T = S \cap U, \qquad S + T = S + U \qquad \text{y} \qquad T \subseteq U.$$

Probar que $T = U$.

29. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

a) $V = K^n$; $v = (x_1, \dots, x_n)$ y $B = E$ la base canónica.

b) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, 2, -1)$ y $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$.

c) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$.

d) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$.

e) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3\,,\, 1 + X\,,\, X^2 + 5\,,\, X^3 + X^2\}$.

f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

30. En cada uno de los siguientes casos, calcular $C_{BB'}$, hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B':

a) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$, $v = (2, 3)$.

b) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$,
$v = (-1, 5, 6)$.

c) $\mathrm{V} = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3\,,\, 1 + X\,,\, X^2\}$, $B' = \{1\,,\, X + 3\,,\, X^2 + X\}$, $v = X$.

d) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$.

e) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$,

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\} , \; v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

31. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean B , B' y B'' bases de V.
Probar que $C_{BB''} = C_{B'B''} C_{BB'}$. Deducir que $C_{BB'}$ es una matriz inversible con $C_{BB'}^{-1} = C_{B'B}$.

32. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ dos bases de K^n. Sea M la matriz cuyas columnas son $v_1, \dots, v_n$ y sea N la matriz cuyas columnas son $w_1, \dots, w_n$ (ordenadamente). Probar que $C_{BB'} = N^{-1} M$.

33. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3, hallar:

a) una base B_1 de K^3 tal que $M = C_{B_1 B}$.

b) una base B_2 de K^3 tal que $M = C_{BB_2}$.