Cálculo Avanzado - Segundo Cuatrimestre de 2016

Práctica 7: Espacios Normados

---

1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado (sobre $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Probar que se verifican:
   (a) Las operaciones $+ : E \times E \to E$ y $\times : k \times E \to E$ son continuas.
   (b) $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
   (c) $diam(B_r(x)) = 2r$.

2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall\ x, y \in C$ y $\forall\ t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.
   (a) Probar que $B_r(x)$ es convexo.
   (b) Probar que si $(C_i)_{i \in I}$ son convexos, entonces $\cap_{i \in I} C_i$ lo es.
   (c) Probar que si C es convexo, entonces C° y $\overline{C}$ también lo son.

3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:
   i) $\overline{S}$ también es un subespacio.
   ii) Si $S \neq E$, entonces $S^o = \emptyset$.
   iii) Si $dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.

4. Decidir para cada uno de los siguientes subespacios si es hiperlano, si es cerrado, y si es denso.
   (a) $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \ \exists \lim_{n \to \infty} x_n\} \subset l^\infty$.
   (b) $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subset c$.
   (c) $\{x \in l^1 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\} \subset l^1$.
   (d) $\{x \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\} \subset l^2$.
   (e) $\mathbb{R}[X] \subset C[0,1]$.

5. Consideramos el espacio normado $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \geq 1} /\ \exists n_0,\ a_n = 0\ \forall n \geq n_0\}, \|\cdot\|_\infty)$. Decidir si la función lineal $T : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T((a_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$$

es continua.

6. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión infinita. Definir una función lineal $\phi : E \to k$ que no sea continua. Deducir que todo espacio normado de dimensión infinita contiene un subespacio (vectorial) propio denso.

7. Sea T: $c \to \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n\to\infty} a_n$. Probar que T es lineal y continua. Hallar $\|T\|$.

8. Sean $p, q \geq 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sea $b \in l^q$. Probar que la función $T_b : l^p \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$$

es lineal y continua. Hallar $\|T\|$.

9. Sea $\phi \in C[0,1]$ y sea $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que T es lineal y continua. Probar que $\|T\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$.

10. Sea $\psi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$T(f)(x) = \int_0^1 f(y)\psi(x,y)dy.$$

Probar que T es lineal y continua.

11. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado (sobre $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), y sea $H \subset E$ un subespacio. Probar que H es un hiperplano si y sólo existe $T : E \to k$ lineal, $T \not\equiv 0$, tal que $H = \mathrm{Nu}(T)$. Probar que H es cerrado si y sólo si T es continua.

12. Sean E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio vectorial cerrado propio y $0 < \alpha < 1$. Probar que existe $x \in E - S$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|s - x\| > \alpha\ \forall s \in S$.

13. Sea E un espacio normado de dimensión infinita.
    (a) Probar que existe $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2,\ n \neq m$.
    (b) Probar que $\overline{B_1(0)}$ no es compacta.

14. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:
    (1) T es continuo en 0;
    (2) $\exists x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0;
    (3) T es continuo;

(4) T es uniformemente continuo;

(5) $\exists M > 0 / \ \forall x \in E \ : \|Tx\| \leq M\|x\|$ (T es *acotada*);

(6) $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

15. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M / \ \|Tx\| \leq M\|x\|\}.$$

16. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Consideramos

$$L(E, F) = \{T : E \to F \,|\, T \text{ es lineal y continua}\}$$

y para cada $T \in L(E, F)$,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que:

(a) $(L(E, F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

(b) Si F es de Banach entonces $L(E, F)$ también lo es.

17. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n) \subset E$. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

18. Sean E un espacio de Banach y S, T subespacios cerrados, con $\dim T < \infty$. Probar que $S + T$ es cerrado.

19. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que E no puede tener una base numerable.