Cálculo Avanzado - Segundo Cuatrimestre de 2016

Práctica 5: Compacidad

---

1. (a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es compacto.
   (b) Probar que $\mathbb{R}$ no es compacto.
   (c) Probar que $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ no es compacta.

2. Sea $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $\mathbb{Q}$.

3. Probar que la bola cerrada $\overline{B}(0,1) \subset \ell^\infty$ no es compacta, donde 0 representa la sucesión constante igual a 0.

4. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

5. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que toda unión finita y toda intersección de subconjuntos compactos de X es compacta.

6. Sea (X,d) un espacio métrico y $F \subset X$. Probar que F es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

7. Sea (X,d) un espacio métrico y $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de X. Un número $\epsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* para $(U_i)_{i\in I}$ si para cualquier $x \in X$ existe un abierto U_j del cubrimiento tal que $B(x,\epsilon) \subset U_j$.

   Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

8. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$, entonces f es continua.

9. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y,d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x,y) = y$ es cerrada.

10. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X,d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

11. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

12. Sea (X, d) un espacio métrico.

    (a) Si $K \subset X$ es un compacto y $x \in X$, probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia entre x y K "se realiza".

    (b) Si $F, K \subset X$ son disjuntos con F cerrado y K compacto, probar que la distancia entre F y K es positiva. ¿Existen necesariamente $x \in F$ e $y \in K$ tales $d(F, K) = d(x, y)$? ¿Y si F es compacto?

13. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X \mid K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

    (a) Sea $\tilde{d}(A, B) = \sup\limits_{a\in A}\{d(a, B)\}$. Verificar que $\tilde{d}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

    (b) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $\delta(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$. Probar que para todo $\epsilon > 0$ vale

$$\delta(A, B) < \epsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B(B, \epsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A, \epsilon),$$

    donde $B(C, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, C) < \epsilon\}$ para cada $C \subset X$.

    (c) Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

14. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$. Probar que la condición

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X, \qquad x \neq y,$$

no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo de f, pero que sí lo es si X es compacto.