Cálculo Avanzado - Segundo Cuatrimestre de 2016

Práctica 3: Separabilidad - Continuidad

---

1. Probar que $\mathbb{R}^n$ es separable.

2. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \exists\, n_0 : a_n = 0\ \forall\, n \geq n_0\}$ y $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

   Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

3. Consideremos la distancia d' definida en ℓ_∞ por

$$d'((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

   Probar que (ℓ_∞, d') es separable.

4. Sea $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ con la distancia infinito. ¿Es separable?.

5. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

   Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X,d) e (Y,d') son separables.

6. Sea (X,d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable.

7. Sea (X,d) un espacio métrico separable y sea $Y \subset X$. Probar que si Y no es finito ni numerable, entonces Y tiene al menos un punto de acumulación.

8. Consideramos las funciones $E, I : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $E(f) = f(0)$ e $I(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$.

   (a) Demostrar que si utilizamos en $C[0,1]$ la distancia d_∞, ambas resultan continuas.

(b) Demostrar que si utilizamos en $C[0,1]$ la distancia d_1, I es una función continua pero E no lo es.

(c) Analizar si es posible que una función $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

9. Hallar los puntos donde son continuas las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \end{cases} \qquad g(x) = x.f(x); \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } \ (m:n) = 1. \end{cases}$$

10. Sea (X,d) un espacio métrico y $E \subset X$. Probar que la inclusión $i : (E,d) \longrightarrow (X,d)$ es continua.

11. Sean d_2 y δ las métricas euclídea y discreta en $\mathbb{R}^n$ respectivamente.

(a) Decidir si la función identidad $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}^2, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ es continua.

(b) Decidir si la función identidad $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$ es continua.

12. Sean X un conjunto y d_1 y d_2 métricas en X. Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad $\mathrm{Id} : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ es homeomorfismo.

13. Probar que un espacio métrico X es discreto si y sólo si toda función de X a un espacio métrico es continua.

14. Probar que considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea,

(a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto,

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado,

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y \sin(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.

15. Consideramos tanto en $\mathbb{Z}$ como en $\mathbb{Q}$ la métrica d_1 dada por $d_1(x,y) = |x - y|$. ¿Existe un homeomorfismo $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$?

16. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $D \subset X$ denso. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

17. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$. Probar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

19. Sea $f : (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ una función. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ y $f|_{X_i}$ continua para cada $i = 1, \ldots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

(b) Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

(c) Si $X = \bigcup_{i \in I} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

(d) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para cada $i = 1, \ldots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

20. Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el gráfico de f, definido por
$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\},$$
es cerrado en $X \times Y$. ¿Es cierta la afirmación recíproca?

21. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subset X$ y se dice *cerrada* si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subset X$.

(a) Suponiendo que f es biyectiva, probar que f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

(b) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea abierta.

(c) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea cerrada.

22. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞.

(a) Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son continuas y abiertas. ¿Son necesariamente cerradas?

(b) Sea (Z, δ) un espacio métrico y sea $f : Z \longrightarrow X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

23. Sea (X, d) un espacio métrico. Consideramos en $X \times X$ la métrica $d : \infty$. Sea $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ la aplicación diagonal definida por $\Delta(x) = (x, x)$. Probar que:

(a) $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

(b) Δ es un homeomorfismo entre X y $\{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$.

24. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Probar que la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ es (uniformemente) continua.

25. (Lema de Urysohn) Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B cerrados disjuntos de X.

(a) Probar que existe una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:
$$f|_A \equiv 0, \qquad f|_B \equiv 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall\, x \in X.$$

Sugerencia: Considerar la función $f(x) = \dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$.

(b) Deducir que existen abiertos $U, V \subset X$ disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

26. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función.

    (a) Probar que f es continua si y sólo $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$. Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

    (b) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

27. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

    (a) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

    (b) Probar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

    (c) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

28. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow f(x_0) < f(x) + \epsilon \qquad (\text{resp. } f(x_0) + \epsilon > f(x)).$$

    Probar que:

    (a) f es continua en x_0 si y sólo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0.

    (b) f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

    (c) f es semicontinua superiormente si y sólo si $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

    (d) si $A \subset X$ y $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ es su función caracterstica, entonces χ_A es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) si y sólo si A es abierto (resp. cerrado).