Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2015

TP N° 1. Membrana vibrante

El objetivo de este trabajo es resolver la ecuación de ondas en un cuadrado:

$$\begin{cases} u_{tt} = a(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t) & (x,y) \in \Omega = [0,1]^2,\ t \in [0,T] \\ u(x,y,0) = g(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ u_t(x,y,0) = h(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y,t) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Implementar un programa que utilice la discretización:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = a\frac{1}{2}\left\{ \frac{\delta_x^2 u^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 u^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{\delta_x^2 u^{n-1}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 u^{n-1}}{\Delta y^2} \right\}$$

Utilizar diferencias centradas para el dato inicial sobre u_t. El programa debe recibir como parámetros los pasos espaciales $\Delta x, \Delta y$, el paso temporal Δt, el tiempo final T, el coeficiente a, el dato inicial g y la fuente f.

Grafique la evolución de u.

Pruebe el algoritmo con algunas combinaciones de los siguientes datos:

$$g(x,y) = 0, \quad g(x,y) = (x - x^2)(y - y^2), \quad g(x,y) = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^2}$$

$$f(x,y,t) = 0, \quad f(x,y,t) = (x - x^2)(y - y^2), \quad f(x,y,t) = (x - x^2)(y - y^2)\cos(t)$$

$$f(x,y,t) = \begin{cases} -1 & x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{4},\ \lfloor 10t \rfloor \equiv 0(2) \\ -1 & x = \frac{3}{4},\ y = \frac{3}{4},\ \lfloor 10t \rfloor \equiv 1(2) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$h(x,y) = 0, \quad h(x,y) = (y - y^2)(x - x^2), \quad h(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(\pi y), \quad h(x,y) = 2$$

$$a = 1, \quad a = 0.1, \quad a = 10$$