Variables aleatorias continuas: Distribución de mezcla de v.a. + Cambio de variable

---

1. Un comerciante vende ejes en cajones de 250 unidades, de las cuales 50 son producidas por la máquina 1 y tienen longitud X, y el resto son producidas por la máquina 2 y tienen longitud Y. Si X e Y son variables aleatorias continuas con funciones de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\,(x-1) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} e^{-\,(x-1)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Hallar la función de densidad de la variable aleatoria $Z =$ longitud de un eje elegido al azar de la caja.

   b) Hallar $E(Z)$.

2. Si $X \sim \mathcal{U}[-2, 2]$, hallar la densidad de $Z = X^2$.

3. El tiempo en horas que tarda un alumno en resolver un problema de probabilidades es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = 8$. Si el ejercicio le insumió un tiempo X, el tiempo en horas que este alumno necesita descansar para recuperarse es $Y = e^{2X} - 1$.

   a) Probar que $E(Y) = \frac{1}{3}$ y $V(Y) = \frac{2}{9}$. Compararlos con $E(X)$ y $E(Y)$.

   b) Calcular la probabilidad de que un alumno demore más de 10 minutos para resolver un ejercicio.

   c) Calcular la probabilidad de que un alumno necesite más de $e - \frac{1}{2}$ horas (aproximadamente 2 hora y 12 minutos) para resolver un ejercicio y recuperarse de este trabajo.

   d) Hallar la densidad f_Y.

4. A partir de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$, genere una variable aleatoria Z discreta con $R_Z = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $\mathbb{P}(\{Z = i\}) = p_i$, donde $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

   Notar que cualquier variable aleatoria discreta con rango finito puede ser generada a partir de una $\mathcal{U}[0, 1]$.