Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2015

Práctica * - Distribuciones

1. Dada $f \in L^1_{loc}(I\!R^n)$, probar que:
   (a) La aplicación $T_f : \mathcal{D}(I\!R^n) \to R$ dada por $T_f(\phi) = \int_{I\!R^n} f\phi$ es una distribución.
   (b) La aplicación $f \to T_f$ es inyectiva.
   (c) Si $f \in C(I\!R^n)$, entonces $sopf = sopT_f$.

2. Sea H la aplicación definida por
$$H(\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$
   Probar que:
   (a) H pertenece a $\mathcal{D}'(I\!R)$
   (b) No existe $f \in L^1_{loc}$ tal que $H = T_f$.

3. Sea $g \in L^1(I\!R^n)$ tal que $\int_{I\!R^n} g = 1$, y sea $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} g(\frac{x}{\varepsilon})$. Probar que $g_\varepsilon \to \delta$ en $\mathcal{D}'(I\!R^n)$.

4. Sea $u(x) = log|x|$. Probar que $u \in \mathcal{D}'(I\!R)$, y calcular u'.

5. (a) Sea $u \in \mathcal{D}'(I\!R)$ tal que $u' = 0$. Probar que u es constante.
   (b) Si $u \in C^k(I\!R^n)$, probar que sus derivadas distribucionales coinciden con las clásicas. Recíprocamente, dada $u \in \mathcal{D}'(I\!R^n)$ tal que $\partial^\alpha u$ es continua para $|\alpha| \leq k$, probar que $u \in C^k(I\!R^n)$.

6. (a) Sean $u, v \in D'(I\!R^n)$, u de soporte compacto. Probar que la aplicación $u * v(\phi) := v(\widetilde{u} * \phi)$ está bien definida, y que $u * v \in \mathcal{D}'(R^n)$.
   (b) Calcular $\delta * v$.

7. Sea $u \in D'(I\!R^n)$ de soporte compacto. Probar que existen $c > 0$, $k \in I\!N_0$ tales que
$$|u(\phi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty$$
   para toda $\phi \in \mathcal{D}(I\!R^n)$.

8. Probar que todo polinomio es una distribución temperada, pero e^x no lo es.

9. (a) Dada $u \in \mathcal{S}'(I\!R^n)$, probar que $u|_{\mathcal{D}(I\!R^n)} \in \mathcal{D}'(I\!R^n)$.

   (b) Dada $u \in \mathcal{D}'(I\!R^n)$ de soporte compacto, probar que u se extiende a un elemento de $\mathcal{S}'(I\!R^n)$.

10. Hallar todas las $u \in \mathcal{D}'(R)$ tales que

$$a) u' = \delta \qquad b) u'' = \delta \qquad c) u' + u = \delta$$