Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2015

PRÁCTICA 7 - TRANSFORMADA DE FOURIER

Obs: la definición de transformada que se usa en esta práctica es:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

1. Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones
   (a) $\chi_{[a,b]}$.
   (b) χ_P con $P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.
   (c) $(1 + x^2)^{-1}$.
   (d) $e^{-|x|}$.

2. Probar que para $f \in L^1(I\!R^n)$
   (a) $\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{ih\xi} \widehat{f}(\xi)$, con $(\tau_h f)(x) = f(x - h)$.
   (b) $\widehat{(\delta_a f)}(\xi) = a^{-n} \widehat{f}(\xi/a)$ con $(\delta_a f)(x) = f(ax)$.
   (c) Si L es el operador diferencial definido por $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ con $a_\alpha \in \mathbb{C}$, entonces
   $$\widehat{(Lf)}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$
   (d) Si $\widehat{f} \in L^1(I\!R^n)$, entonces $\widehat{\left(\widehat{f}\right)}(x) = f(-x)$.

3. (a) Hallar $f, g \in L^1(I\!R^n)$ no nulos tales que $f * g = 0$.
   (b) Probar que si $f * f = 0$, entonces $f = 0$.
   (c) Probar que no existe $f, g \in L^1(I\!R^n)$ tal que $f * g = g$ para toda $g \in L^1(I\!R^n)$.

4. Calcular $\widehat{f}$ siendo f
   (a) $f(x) = e^{-x^2/2}$.
   (b) $f(x) = sech\left(\sqrt{\pi/2}x\right)$.

5. Probar que si $f \in L^2(I\!R^n)$ verifica $\widehat{f} = \lambda f$ entonces $\lambda = i^k$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

6. Dada $f \in L^2(I\!R^n)$ ver que existen $r_n \to \infty$ tales que

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{-r_n}^{+r_n} f(x) e^{-i\xi x} dx \qquad \text{c.t.p. } \xi \in I\!R.$$

7. Calcular $\widehat{f}$ siendo $f(x) = senx/x$.

   Obs: $senx/x \notin L^1(I\!R)$.

8. Sea $f \in L^2(I\!R)$ con $sop(\widehat{f}) \subset [-L, L]$.

   (a) Probar que $f \in C^\infty(I\!R)$.

   (b) Ver que $s_n(\xi) \to \widehat{f}$ en $L^2(I\!R)$ cuando $n \to \infty$, siendo

$$s_n(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{|k|\leq n} f(-k\pi/L) e^{ik\pi\xi/L} \mathcal{X}_{[-L,L]}(\xi).$$

   (c) Obtener la siguiente expresión (teorema de Kotelnikov - Nyqvist)

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\pi/L) \frac{senL(x - k\pi/L)}{L(x - k\pi/L)}.$$

9. Obtener expresiones integrales para las soluciones de

   (a) Ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in I\!R \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R. \end{cases}$$

   (b) Ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y) \in I\!R \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \\ u(.,y) \in L^2 & \text{para todo } y > 0. \end{cases}$$

(c) Ecuación de onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in I\!R \times I\!R \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & x \in I\!R. \end{cases}$$

(d) Ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in I\!R \times I\!R \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R. \end{cases}$$

(e) Ecuación de Airy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} & (x,t) \in I\!R \times I\!R \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R. \end{cases}$$

En todos los casos se asume que los datos iniciales pertenecen a $\mathcal{S}(I\!R)$.

10. Dados $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(I\!R)$ se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -u(x,t) \in I\!R^2 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & x \in I\!R. \end{cases}$$

(a) Encontrar la transformada de Fourier de: $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ y $u_t(x,t)$.

(b) Probar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(|u(x,t)|^2 + |u_x(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 \right) dx$$

es constante para todo $t \in I\!R$.

Sug: Usar la igualdad de Parseval.

11. Sea $T_\varepsilon \in \mathcal{S}'(I\!R)$ definida por

$$T_\varepsilon(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\varepsilon^2 + x^2} \varphi(x)\, dx.$$

(a) Probar que $T_\varepsilon \to H$ si $\varepsilon \searrow 0$.

(b) Ver que $\widehat{T}_\varepsilon(\xi) = c.sgn(\xi)\, e^{-\varepsilon|\xi|}$.

(c) Calcular $\widehat{H}(\xi)$.

12. Dado el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^{2k} u = 0 & (x,t) \in I\!R \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R. \end{cases}$$

(a) Probar que para $t > 0$, existe $P_t \in \mathcal{S}$ tal que

$$u(x,t) = (P_t * u_0)(x).$$

(b) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x)\, dx$.

13. Para f continua y acotada en $(0,\infty)$ se define

$$(Lf)(z) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-xz} dx \qquad \mathrm{Re} z > 0.$$

Probar que

(a) $F(z)$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$.

(b) Para todo $x > 0$ vale

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} (Lf)(\eta + i\xi)\, e^{x(\eta+i\xi)} d\xi \qquad \eta > 0.$$