Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2015

PRÁCTICA 4 - ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE PRIMER ORDEN

1. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 & (x,t) \in I\!R^{n+1} \\ \\ u(x,0) = f(x) & x \in I\!R^n \end{cases}$$

2. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & x \in I\!R^n \\ \\ u(0, x_2, \ldots, x_n) = x_2 \end{cases}$$

3. Hallar la solución del siguiente problema y analizar donde está definida

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & x \in I\!R^n \\ \\ u(1, x_2, \ldots, x_n) = x_n \end{cases}$$

4. Dada la ecuación

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

probar

   (a) Cualquier solución es constante sobre hipérbolas $xy = cte$.
   (b) Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta $u = x = y$.

5. Probar que no existe solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $x = y$.

6. Probar que la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u^2$$

cuyo gráfico contiene a la recta $u=x=-y$ no está definida sobre la hipérbola $x^2-y^2=4$.

7. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial u}{\partial y}=(x+y)\,u \\ \\ u\,(0,y)=y \end{cases}$$

8. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}-3u=0 \\ \\ u\,(x,y,0)=f\,(x,y) \end{cases}$$

suponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f. Estudiar el caso $f\,(x,y)=xy$.

9. Sea $a,b\in C^1\left(\overline{D}\right)$ tales que $xa\,(x,y)+yb\,(x,y)<0$ si $x^2+y^2=1$ donde $D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$. Probar que si $u\in C^1\left(\overline{D}\right)$ es una solución de

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=u$$

entonces $u=0$.

10. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=1 \\ \\ u\,(x,x)=\frac{x}{2} \qquad\qquad x\in(0,1) \end{cases}$$

11. Estudiar el dominio de definición de la solución clásica de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \\ u(0,y) = \phi(y) \end{cases}$$

con α y ϕ no constantes.

12. Sea $u(x,t)$ la solución clásica del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = \beta(x,t) \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Ver que sobre las curvas características $(x(t), t)$, u se expresa como

$$u(x(t), t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \beta(x(\xi), \xi)\, d\xi$$

13. Sea la ecuación de primer orden

$$\begin{cases} (1 + x^{2n})\frac{\partial u}{\partial x} + 2nx^{2n-1}y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \\ u(x,y) = g(x,y) \qquad\qquad (x,y) \in \mathcal{E} \end{cases}$$

donde n es un número natural, $\mathcal{E}$ la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y g una función suave.

(a) Dar condiciones sobre g para que la solución clásica esté definida en el interior de la elipse.

(b) Resolver para $g(x,y) =$ y $a = b = n = 1$.