Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2015

Práctica 2 - Problema de Sturm-Liouville

1 Función de Green

1. Construir la función de Green asociada al problema

$$\begin{cases} -u'' = f(t) \\ \\ u(0) = 0, \ u(1) = 0 \end{cases}$$

2. Resolver los siguientes problemas usando la función de Green

$$(a) \begin{cases} -u''(t) + u(t) = t & t \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} -u''(t) + u(t) = sin(t) & t \in (0,2\pi) \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -u''(t) + u(t) = e^t & t \in (-1,1) \\ u(-1) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

3. Sea u una solución no trivial de $u'' + qu = 0$.

   (a) Si $q > 0$ en $(0, +\infty)$ y $\int_1^{+\infty} q(t)dt = \infty$, probar que u tiene infinitos ceros positivos. (Sugerencia: suponer que existe un último cero en t_f, e integrar por partes la equación $-\frac{u''}{u} = q$).

   (b) ¿ Vale el resultado sin la hipótesis $\int_0^{+\infty} q(t)dt = \infty$? Considerar el caso $q(t) = \frac{\lambda}{t^2}$.

   (c) Si $q \leq 0$, probar que $u'u$ es creciente, y que u tiene a lo sumo un cero.

4. Sean u, v tales que

$$-(pu')' + qu = 0$$
$$-(pv')' + \overline{q}v = 0$$

en donde $q \geq \overline{q}$. Si a y b son dos ceros consecutivos de u, probar que v se anula en (a, b) o v es un múltiplo de u (y $\overline{q} = q$).

2 Autovalores y autofunciones

5. Dado el problema

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda \rho u & , a < t < b \\ \\ u(a) = 0, \ u(b) = 0 \end{cases}$$

donde $p \in C^1[a, b]$ $q, \rho \in C[a, b]$ $p, \rho > 0$ $q \geq 0$. Probar

   (a) El autoespacio asociado a un autovalor λ tiene dimensión 1.

   (b) Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales en $L^2_\rho[a, b]$.

   (c) Todos los autovalores son positivos.

6. Consideremos el problema del ejercicio anterior. Probar

   (a) La autofunción u_0 asociada al menor autovalor λ_0 no se anula en $[a, b]$ (en particular u_0 no cambia de signo).

   (b) La n-ésima autofunción u_n tiene por lo menos n ceros en (a, b).

   (c) Si $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son dos ceros consecutivos de una autofunción u_n del problema, entonces u_n es la autofunción asociada al menor autovalor del problema equivalente en el intervalo $[\overline{a}, \overline{b}]$.

   (d) Si $[\overline{a}, \overline{b}] \subseteq [a, b]$, $\overline{p} \geq p$, $\overline{q} \geq q$, $\overline{\rho} \leq \rho$, el menor autovalor $\overline{\lambda}_0$ de

$$\begin{cases} -(\overline{p}u')' + \overline{q}u = \overline{\lambda}\,\overline{\rho}u & \overline{a} < t < \overline{b} \\ \\ u(\overline{a}) = 0, \ u(\overline{b}) = 0 \end{cases}$$

   verifica $\overline{\lambda}_0 \geq \lambda_0$.

(e) Probar que $\overline{\lambda}_n \geq \lambda_n \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$.

7. Hallar cotas para el n-ésimo autovalor de

$$\begin{cases} -\left(\left(1+t^2\right)u'\right)' + tu = \lambda u & , 0 < t < 1 \\ u(0) = 0, \ u(1) = 0 \end{cases}$$

8. Dada la ecuación $-u'' + tu = 0$. Probar

   (a) Sus soluciones poseen infinitos ceros en el semieje negativo y a lo sumo uno en el positivo.

   (b) Si u es solución, $v(t) = u(kt)$ es solución de $-v'' + k^2 tv = 0$

   (c) El problema

$$\begin{cases} -u'' + tu = \lambda u & , 0 < t < 1 \\ u(0) = 0, \ u(1) = 0 \end{cases}$$

   no tiene autovalores negativos.

9. Sean $p(t) = 5 - 3t^2$ y $q(t) = -6$

   (a) Obtener acotaciones para λ_k / k^2, donde λ_k representa el k-ésimo autovalor del problema

$$\begin{cases} -\left(pu'\right)' + qu = \lambda u \\ u(0) = 0, \ u(1) = 0 \end{cases}$$

   (b) Probar que si u es autofunción, entonces $u \in C^\infty(0,1)$.

   (c) Verificar que $u(t) = t\left(1 - t^2\right)$ es autofunción.

   (d) Probar que para toda $u \in C^2[0,1]$ que verifica $u(0) = 0, \ u(1) = 0$ vale

$$\int_0^1 p\left(u'\right)^2 dt \geq 36 \int_0^1 u^2 dt$$