Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

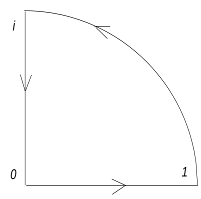
Análisis Complejo

Práctica N°5. Integrales

1. Calcular

   i) $\int_\gamma \overline{z}dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

   ii) $\int_\gamma |z|^2 z dz$ para la siguiente curva γ:



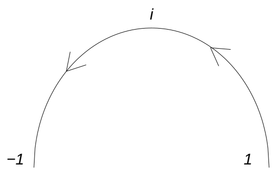
2. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva. Notamos por $-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ a la curva dada por $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$. Probar que

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ y sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = az + b$. Dadas una curva γ y $c \notin \gamma$, probar que

$$\int_{T\circ\gamma} \frac{dz}{z - T(c)} = \int_\gamma \frac{dz}{z - c}.$$

4. Sea γ la curva:



   Demostrar que

$$\Big| \int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} dz \Big| \leq \pi \frac{1 + e}{2}.$$

5. Sea $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Probar que $\lim\limits_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

6. Sea γ como en el ejercicio 4. Calcular $\int_\gamma \cos(z)dz$.

7. Sean $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|b-a| \neq r$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = a+re^{it}$.

   i) Calcular $\int_\gamma (z - b)^n dz$ si n es un entero distinto de -1.

   ii) Probar que si $|b - a| < r$, entonces $\int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 2\pi i$.

   iii) Probar que si $|b - a| > r$, entonces $\int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 0$.

8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$. Demostrar que si $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en una curva $\gamma \subseteq \Omega$ entonces $\int_\gamma f_n(z)dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)dz$.

9. Evaluar $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$ siendo γ alguna de las siguientes curvas:

10. Encontrar todos los posibles valores de $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$, donde γ es una curva diferenciable simple cerrada que no pasa por $\pm i$.

11. Sea γ la curva cuya imagen es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parametrizada por $\gamma(t) = a \cos t + ib \operatorname{sen} t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deducir que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

12. Sea γ una curva y $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \notin \gamma$. Notamos por $\eta(\gamma, w)$ al índice de la curva γ con respecto a w. Probar:

    i) $\eta(\gamma, w) = -\eta(-\gamma, w)$ donde $-\gamma$ se define como en el ejercicio 2.

    ii) $\eta(\gamma, w) = 0$ para todo $w \notin \{|z| \leq \max|\gamma|\}$.

    iii) $\eta(\gamma, w)$ es continua.

    iv) $\eta(\gamma, w)$ es constante como función de w en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

13. Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Sea $\varphi : \gamma \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)dw$. Probar que:

    (a) g es continua.

    (b) Si para todo $w \in \gamma$, la función $\varphi(w, -) : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y además $\frac{\partial \varphi(w,z)}{\partial z}$ resulta continua en w y z, entonces g es holomorfa y $g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi(w,z)}{\partial z} dw$.

14. (a) Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $f : \gamma \to \mathbb{C}$ una función continua. Definimos $\varphi : \gamma \times (\mathbb{C} \setminus \gamma) \to \mathbb{C}$ por $\varphi(w, z) = \frac{f(w)}{w-z}$ y $g : \mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)dw$. Probar que g es holomorfa y $g^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$.

    (b) Deducir que si γ es cerrada y f es holomorfa, entonces se tiene que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i \eta(\gamma, z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

15. Calcular:

    i) $\int_\gamma \frac{e^z}{z-2} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 4e^{it}$,

    ii) $\int_\gamma \frac{z}{z+1} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$,

    iii) $\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

iv) $\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3}dz, \quad \gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = \frac{2}{3}e^{it}$,

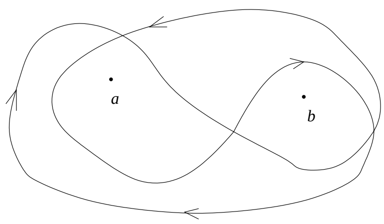
v) $\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz, \quad \gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

16. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que $f_n \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f$ en K para todo compacto K de Ω (notar que f_n puede no tender uniformemente a f en Ω). Probar que si f_n es holomorfa en Ω para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es holomorfa en Ω y $f_n' \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f'$ en K para cada compacto K de Ω.

17. Probar que $f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2}dt$ es una función holomorfa en $\mathrm{Re}(z) > 0$.

18. Probar que si $f(z)$ es continua en el disco cerrado $|z| \leq r$ y holomorfa en el disco abierto $|z| < r$, se tiene
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z}dw$$
para todo $|z| < r$.

19. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



i) Mostrar que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.

ii) *Convencerse* de que γ no es homotópica a cero en Ω.

20. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?

21. (a) Sea Ω un abierto simplemente conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y $g(z_0) = w_0$. (Sugerencia: tomar g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y mostrar que $h = e^{-g}f$ es constante.)

    (b) Demostrar que tal g es única.

    (c) Decidir si en las condiciones del ítem (a), vale que para todos $z_1, z_2 \in \Omega$, $f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow g(z_1) = g(z_2)$.

    (d) ¿Es necesaria la hipótesis de "simplemente conexo" en el ítem (a)?

22. Sean f y g dos funciones enteras. Probar que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe una función entera h tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \mathrm{sen}(h(z))$. (Sugerencia: notar que $1 = (f+ig)(f-ig)$, luego $(f+ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.)