Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2015

TP N° 1. Método ADI 3D

El objetivo de este trabajo es resolver la ecuación del calor en un cubo, utilizando un método de direcciones alternadas. Concretamente, se desea resolver:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + f & \Omega = [0,1]^3,\ t \in [0,1] \\ u(x,y,z,t) = 0 & (x,y,z) \in \partial\Omega,\ t \in [0,1]. \\ u(x,y,z,0) = g(x,y,z) & (x,y,z) \in \Omega \end{cases}$$

Consideramos una grilla:

$$\{x_i = ih_x :\ 1 \leq i \leq I-1\} \times \{y_j = jh_y :\ 1 \leq j \leq J-1\} \times \{z_k = kh_z :\ 1 \leq k \leq K-1\}.$$

del interior de Ω. Para simplicar, puede tomarse $h_x = h_y = h_z = h$ y $I = J = K$. A esto agregamos la grilla $\{t_n = n\Delta t :\ \ 0 \leq T\}$, con $T = 1/\Delta t$. Sobre esta grilla se define u^n_{ijk}, aproximación de $u(x_i, y_j, z_k, t_n)$. Notamos u^n al arreglo (u^n_{ijk}). Definimos también el operador δ^2_x, dado por:

$$\delta^2_x u^n_{ijk} = \frac{u^n_{i+1jk} - 2u^n_{ijk} + u^n_{i-1jk}}{h^2}.$$

Análogamente se definen δ^2_y y δ^2_z, que operan sobre las coordenadas j y k respectivamente.

El método de direcciones alternadas propuesto consiste en resolver, en cada paso temporal, los siguientes sistemas tridiagonales:

$$\begin{aligned} \big(\Delta t\delta^2_x - 2\big)u^{n+1*} &= -\Delta t\big(\delta^2_x + 2\delta^2_y + 2\delta^2_z + 2\big)u^n + 2\Delta t f^{n+\frac{1}{2}}_{ijk} \\ \big(\Delta t\delta^2_y - 2\big)u^{n+1**} &= \Delta t\delta^2_y u^n - 2u^{n+1*} \\ \big(\Delta t\delta^2_z - 2\big)u^{n+1} &= \Delta t\delta^2_z u^n - 2u^{n+1**} \end{aligned}$$

Sugerencias de Implementación: (No obligatorias)

- Escribir la solución como un `cell` de $T+1$ casilleros `U`, de modo que `U{n}` sea un arreglo tridimensional que represente a u^n.
- Escribir los operadores involucrados como matrices tridiagonales de tamaño $(I-1) \times (I-1)$.
- Escribir dos funciones auxiliares: una que multiplique una matriz por un arreglo tridimensional, y otra que resuelva un sistema $AX = B$, donde A es una matriz y B un arreglo tridimensional.

- Estudiar los comandos `permute` e `ipermute`, para realizar las 'trasposiciones' adecuadas, que permitan aplicar los operadores sobre las variables correspondientes.

Resolver con los siguientes datos:

$$g(x,y,z) = x(1-x)y(1-y)z(1-z), \quad f(x,y,z,t) = 0,$$

$$g(x,y,z) = 0, \quad f(x,y,z,t) = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^3}(x,y,z) \times \chi_{[0,\frac{1}{4}]}(t)$$

Graficar la evolución temporal de la temperatura en los planos $z = 0$, $z = \frac{1}{2}$ y $z = \frac{3}{4}$.