

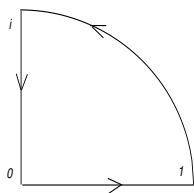
ANÁLISIS COMPLEJO

**Práctica N°5. Integrales**

1. Calcular

i)  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$  para  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = e^{it}$ ,

ii)  $\int_{\gamma} |z|^2 z dz$  para la siguiente curva  $\gamma$ :



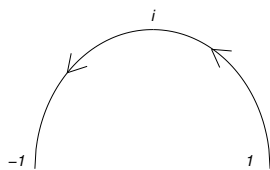
2. Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva. Notamos por  $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  a la curva dada por  $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$ . Probar que

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3. Sean  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  y sea  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $T(z) = az + b$ . Dadas una curva  $\gamma$  y  $c \notin \gamma$ , probar que

$$\int_{T \circ \gamma} \frac{dz}{z - T(c)} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - c}.$$

4. Sea  $\gamma$  la curva:



Demostrar que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\text{sen}(z)}{z^2} dz \right| \leq \pi \frac{1 + e}{2}.$$

5. Sea  $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma_r(t) = re^{it}$ . Probar que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ .

6. Sea  $\gamma$  como en el ejercicio 4. Calcular  $\int_{\gamma} \cos(z) dz$ .

7. Sean  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  tales que  $|b - a| \neq r$  y  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = a + re^{it}$ .

i) Calcular  $\int_{\gamma} (z - b)^n dz$  si  $n$  es un entero distinto de -1.

ii) Probar que si  $|b - a| < r$ , entonces  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - b} = 2\pi i$ .

iii) Probar que si  $|b - a| > r$ , entonces  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - b} = 0$ .

8. Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Demostrar que si  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  en una curva  $\gamma \subseteq \Omega$  entonces  $\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$ .
9. Evaluar  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$  siendo  $\gamma$  alguna de las siguientes curvas:



10. Encontrar todos los posibles valores de  $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$ , donde  $\gamma$  es una curva diferenciable simple cerrada que no pasa por  $\pm i$ .
11. Sea  $\gamma$  la curva cuya imagen es la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  parametrizada por  $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Calcular  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$  y deducir que  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$ .
12. Sea  $\gamma$  una curva y  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $w \notin \gamma$ . Notamos por  $\eta(\gamma, w)$  al índice de la curva  $\gamma$  con respecto a  $w$ . Probar:
- $\eta(\gamma, w) = -\eta(-\gamma, w)$  donde  $-\gamma$  se define como en el ejercicio 2.
  - $\eta(\gamma, w) = 0$  para todo  $w \notin \{|z| \leq \max|\gamma|\}$ .
  - $\eta(\gamma, w)$  es continua.
  - $\eta(\gamma, w)$  es constante como función de  $w$  en cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ .

13. Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva diferenciable a trozos y  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un abierto. Sea  $\varphi : \gamma \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua y  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $g(z) = \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$ . Probar que:

- $g$  es continua.
  - Si para todo  $w \in \gamma$ , la función  $\varphi(w, -) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y además  $\frac{\partial \varphi(w, z)}{\partial z}$  resulta continua en  $w$  y  $z$ , entonces  $g$  es holomorfa y  $g'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(w, z)}{\partial z} dw$ .
14. (a) Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva diferenciable a trozos y  $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua. Definimos  $\varphi : \gamma \times (\mathbb{C} \setminus \gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\varphi(w, z) = \frac{f(w)}{w-z}$  y  $g : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  por  $g(z) = \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$ . Probar que  $g$  es holomorfa y  $g^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$ .
- (b) Deducir que si  $\gamma$  es cerrada y  $f$  es holomorfa, entonces se tiene que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i \eta(\gamma, z)} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

15. Calcular:

- $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z-2} dz$ ,  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = 4e^{it}$ ,
- $\int_{\gamma} \frac{z}{z+1} dz$ ,  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = 1 + e^{ikt}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),
- $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz$ ,  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = e^{it}$ ,

- iv)  $\int_{\gamma} \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3} dz$ ,  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = \frac{2}{3}e^{it}$ ,
- v)  $\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz$ ,  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = 1 + e^{ikt}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

16. Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  en  $K$  para todo compacto  $K$  de  $\Omega$  (notar que  $f_n$  puede no tender uniformemente a  $f$  en  $\Omega$ ). Probar que si  $f_n$  es holomorfa en  $\Omega$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $f'_n \xrightarrow{\text{unif}} f'$  en  $K$  para cada compacto  $K$  de  $\Omega$ .

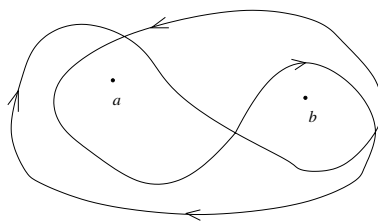
17. Probar que  $f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt$  es una función holomorfa en  $\text{Re}(z) > 0$ .

18. Probar que si  $f(z)$  es continua en el disco cerrado  $|z| \leq r$  y holomorfa en el disco abierto  $|z| < r$ , se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

para todo  $|z| < r$ .

19. Sea  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ ,  $a \neq b$ , y sea  $\gamma$  la curva en la siguiente figura:



- i) Mostrar que  $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$ .
- ii) Convencerse de que  $\gamma$  no es homotópica a cero en  $\Omega$ .
20. Probar que si  $\Omega$  es simplemente conexo y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa, entonces  $f$  tiene una primitiva en  $\Omega$ . ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?
21. (a) Sea  $\Omega$  un abierto simplemente conexo y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y tal que  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in \Omega$ . Sean  $z_0 \in \Omega$  y  $w_0 \in \mathbb{C}$  tales que  $e^{w_0} = f(z_0)$ . Demostrar que existe una función holomorfa  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = e^{g(z)}$  para todo  $z \in \Omega$  y  $g(z_0) = w_0$ . (Sugerencia: tomar  $g$  tal que  $g' = \frac{f'}{f}$  y mostrar que  $h = e^{-g}f$  es constante.)
- (b) Demostrar que tal  $g$  es única.
- (c) Decidir si en las condiciones del ítem (a), vale que para todos  $z_1, z_2 \in \Omega$ ,  $f(z_1) = f(z_2) \implies g(z_1) = g(z_2)$ .
- (d) ¿Es necesaria la hipótesis de “simplemente conexo” en el ítem (a)?
22. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones enteras. Probar que  $f^2(z) + g^2(z) = 1$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  si y sólo si existe una función entera  $h$  tal que  $f(z) = \cos(h(z))$  y  $g(z) = \text{sen}(h(z))$ . (Sugerencia: notar que  $1 = (f + ig)(f - ig)$ , luego  $(f + ig)(z) \neq 0$  para todo  $z \in \Omega$ .)