Topología

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 9

Teorema de van Kampen

---

1. Determine los grupos fundamentales de los siguientes espacios:

   a) $T^2\backslash\{\text{pt}\}$, el toro perforado en un punto;

   b) $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\backslash\{\text{pt}\}$, el plano proyectivo real perforado en un punto;

   c) $S^n \vee S^n$, la unión de dos esferas por un punto;

   d) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \{0\})$;

   e) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R})$;

   f) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$;

   g) $\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \{0\})$.

2. Sea $n \geqslant 3$ y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Pruebe que $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ es simplemente conexo.

3. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ la unión de abiertos convexos $X_1 \cdots X_n$ tales que $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \varnothing$ para todo i, j, k. Muestre que X es simplemente conexo.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_i la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(n, 0)$ y radio n. Sea $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0,0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo libre $\ast_{n\in N}\, \pi_1(C_n)$, el mismo que el grupo fundamental del wedge infinito $\bigvee_{n\in N} S^1$. Muestre que X y $\bigvee_{n\in N} S^1$ son homotópicamente equivalentes, pero no homeomorfos.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_i la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(1/n, 0)$ y radio $1/n$. Sea $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0,0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo no numerable.

6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $Y_n = \{x \in \mathbb{R}^2 :$ existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $d(x, (j - \frac{1}{2}, 0)) = \frac{1}{2}\}$. Determine $\pi_1(Y_n, 0)$.

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^3$ la unión de n rectas por el origen. Calcule $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus X)$.

8. Sea Y un espacio que se obtiene de un espacio arcoconexo X adjuntando n-celdas para un $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$ fijo. Muestre que la inclusión $i : X \to Y$ induce un isomorfismo en el π_1. Aplique lo anterior para mostrar que el complemento de un subespacio discreto de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) es simplemente conexo.

9. Sea X el espacio cociente de S^2 que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto. Calcule $\pi_1(X)$.

10. a) Si $L \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad lineal de dimensión k, con $0 \leqslant k \leqslant n-2$, determine el grupo $\pi_1(\mathbb{R}^2\backslash L)$.

b) Si $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una circunferencia, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash C) \cong \mathbb{Z}$.

Sugerencia: Muestre que $\mathbb{R}^3 \backslash C$ se deforma en un subespacio homeomorfo a $S^1 \vee S^2$

11. Sea $K = I \times I / \sim$ donde $(x, y) \sim (x', y')$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

$$(x = x' \text{ e } y = y') \text{ ó } (\{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ y } x = x') \text{ ó } (\{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y + y' = 1)$$

El espacio K es la *Botella de Klein*. Calcule (una presentación d)el grupo fundamental de $K \setminus \{pt\}$.

12. ¿Cómo haría para contruir un espacio arcoconexo cuyo grupo fundamental sea isomorfo a $\mathbb{Z}_n$? ¿Y uno con grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$?