Topología

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 8

Fibraciones y revestimientos.

Fibraciones.

1. Sean X, Y espacios topológicos. Pruebe que la proyección $\pi_X : X \times Y \to X$ es una fibración con fibra Y . Pruebe que si además Y es discreto, entonces π_X es un revestimiento.

2. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean α, β caminos en B con $\alpha(1) = \beta(0)$. Existen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ levantados de α, β tales que $\tilde{\alpha(1)} = \tilde{\beta(0)}$. Pruebe que $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ es un levantado de $\alpha * \beta$.

3. Sean $p : E \to B$ una fibración, X un espacio localmente compacto y T_2. Sea $p' : C(X, E) \to C(X, B)$ definido por $p'(f) = p \circ f$. Pruebe que p' es fibración.

4. Sea $p : E \to B$ fibración. Sean $f_0, f_1 : X \times I \to E$ funciones. Pruebe que dadas homotopías $H : p \circ f_0 \simeq p \circ f_1$ y $G : f_0|_{X \times \{0\}} \simeq f_1|_{X \times \{0\}}$ tales que $H(x, 0, t) = p \circ G(x, 0, t)$, existe un levantamiento $\tilde{H} : X \times I \times I \to E$ de H que es una homotopía entre f_0 y f_1, y que es una extensión de G.

5. Sea $p : E \to B$ fibración.

   a) Sea $\alpha : I \to B$ camino. Pruebe que existe $H : E_{\alpha(0)} \times I \to E$ tal que $p \circ H(x, t) = \alpha(t)$ y $H(x, 0) = x$ $\forall x \in E_{\alpha(0)}$, $\forall t \in I$.

   b) Dado $\alpha : I \to B$ camino, consideramos $L_\alpha : E_{\alpha(0)} \to E_{\alpha(1)}$ definido por $L_\alpha(x) = H(x, 1)$. Pruebe que:

      I. Si $\alpha \simeq_p \alpha'$, entonces $L_\alpha \simeq L_{\alpha'}$.

      II. Si $\alpha \simeq_p cte_b$, entonces $L_\alpha \simeq 1_{E_b}$.

      III. Dados $\alpha, \alpha' : I \to B$ tales que $\alpha(1) = \alpha'(0)$, entonces $L_{\alpha * \alpha'} \simeq L_{\alpha'} \circ L_\alpha$.

   c) Concluya que si B es arcoconexo, entonces todas las fibras son homotópicamente equivalentes. Y que si además p tiene la propiedad de l.u.c., entonces todas las fibras son homeomorfas.

6. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean $e \in E$, $b = p(e)$.

   a) Puebe que que si B es simplemente conexo, entonces la inclusión de la fibra E_b en E induce un epimorfismo $i_* : \pi_1(E_b, e) \to \pi_1(E, e)$.

   b) Pruebe que si la fibra E_b es simplemente conexa, entonces $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ es un isomorfismo.

   c) Pruebe que si E es simplemente conexo, entonces hay una biyección entre $\pi_1(B, b)$ y $\pi_0(E_b)$.

7. Sea $p : E \to B$ una fibración con l.u.c con E arco-conexo, y fijemos $b_0 \in B$ y $e_0 \in p^{-1}(b_0)$.

   a) Si $\pi_1(B, b_0) \cong \mathbb{Z}$, entonces o bien $\pi_1(E, e_0) \cong \mathbb{Z}$ o bien $\pi_1(E, e_0) = 0$.

   b) Si $\pi_1(B, b_0)$ es finito, entonces también lo es $\pi_1(E, e_0)$ y

   $$|\pi_1(B, b_0)| = |\pi_1(E, e_0)|.|p^{-1}(x_0)|$$

   c) Si B es simplemente conexo y p revestimiento, entonces p es un homeomorfismo.

Revestimientos.

8. Pruebe que las siguientes funciones son revestimientos:

   a) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$.

   b) $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ fijo.

   c) $p : S^n \to P^n$ la proyección al espacio proyectivo.

   d) G grupo topológico, H subgrupo discreto de G y $p : G \to G/H$ la proyección al cociente.

   e) $p : E \to B$, $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z}$ ó $y \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1 : z = 1$ ó $w = 1\}$.

9. Pruebe que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.

10. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces p es abierta y por lo tanto es cociente.

11. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, la fibra $E_b = p^{-1}(b)$ es un subespacio discreto de E para todo $b \in B$. Pruebe además que si B es conexo, todas las fibras tienen el mismo cardinal.

12. Pruebe que si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ también lo es. Use este resultado para calcular el grupo fundamental del toro.

13. Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos. Pruebe que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $q \circ p : X \to Z$ es un revestimiento.

14. Pruebe que los revestimientos son estables por cambio de base. En particular, si $p : E \to B$ es revestimiento y $A \subset B$, entonces $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ es revestimiento.

15. Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Pruebe que si C es una componente conexa de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

16. *a*) Sea $p : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2\pi i t} \in S^1$, sea X un espacio y sea $f : X \to S^1$ una función continua. Entonces existe una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$ sii f es homotopicamente nula.

    b) S^1 no es un retracto de D^2.

17. Sea G un grupo y X un espacio, y sea $\cdot : G \times X \to X$ una acción de G sobre X, de manera que se tiene

$$1_G \cdot x = x, \qquad\qquad (g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$$

para cada g, $h \in G$ y cada $x \in X$ y supongamos que esta acción es continua, de manera que para cada $g \in G$ la función $\phi_g : x \in X \mapsto g \cdot x \in X$ es continua. Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $gU \cap U \neq \emptyset$ si y solamente si $g = 1_G$.

   a) Si X es Hausdorff y G es finito, entonces toda acción continua de G sobre X es propiamente discontinua.

   b) Sea $\simeq$ la relación de equivalencia sobre X tal que, si x, $y \in G$, es $x \simeq y$ sii existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Sea X/G el espacio cociente $X/\simeq$, y sea $p : X \to X/G$ la aplicación cociente. Si la acción de G sobre X es continua y propiamente discontinua, entonces p es un revestimiento.

18. Sabiendo que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, calcule el grupo fundamental de los siguientes espacios.

   a) $X = S^1 \times [0, 1]$, un cilindro.

   b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$, un cilindro infinito.

   c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, el plano pinchado.

   d) $X = M$, la banda de Möbius.

   e) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual.

   f) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una recta o un plano.

Aplicaciones del Teorema de Brouwer y Borsuk-Ulam.

19. Demuestre que si A es un retracto del disco D^2, entonces toda función continua $f : A \to A$ tiene un punto fijo.

20. Demuestre que si $f : S^1 \to S^1$ es null-homotópica, entonces tiene un punto fijo y además existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = -x$.

21. Teorema de Lusternik-Schnirelmann (para dimensión 2). Pruebe que si S^2 se cubre con tres abiertos, entonces uno de ellos contiene dos puntos antipodales.

22. Pruebe que si $f : S^2 \to S^2$ es continua y $f(x) \neq f(-x)$ para todo x, entonces f es sobreyectiva.