Topología

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 7

Homotopía y el grupo fundamental

Homotopía

Un subespacio $A \subseteq X$ es un *retracto* si existe una función continua $r : X \to A$ llamada retracción tal que $ri = 1_A$ (donde $i : A \to X$ es la inclusión del subespacio).

Decimos que $A \subseteq X$ es un *retracto por deformación* si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $ri = 1_A$ que además cumple $ir \simeq 1_X$ (es decir, r es una retracción que es también equivalencia homotópica). A será un *retracto por deformación fuerte* si la homotopía $ir \simeq 1_X$ es relativa a A.

1. Sea X es un espacio topológico. Pruebe que las aplicaciones i_0, $i_1 : X \to X \times I$ definidas por $i_j(x) = (x, j)$ $(j \in \{0, 1\})$ son equivalencias homotópicas con la misma inversa $p : (x, t) \in X \times I \mapsto x \in X$. Más aún, $i_0 \simeq i_1$.

2. Sean f, $g : X \to Y$ funciones continuas tal que $f \simeq g$. Pruebe que si f es una equivalencia homotópica, entonces g también lo es.

3. Pruebe que

   a) Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo, entonces es contráctil. Concluya que I y $\mathbb{R}$ son contráctiles.

   b) Si X es contráctil, entonces es arcoconexo.

   c) Todo retracto de un espacio contráctil es contráctil.

4. Dé un ejemplo de una función f que tenga inversa homotópica a izquierda (a derecha) pero no a derecha (a izquierda).

5. Pruebe que:

   a) Si f posee una inversa homotópica a izquierda y una inversa homotópica a derecha, entonces f es una equivalencia homotópica.

   b) f es una equivalencia homotópica siy sólo si existen functiones g, $h : Y \to X$ tales que $f \circ g$ y $h \circ f$ son equivalencias homotópicas.

6. Sea X un espacio, sea $A \subseteq X$ un subespacio y sea $a_0 \in A$. Supongamos que existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que: $H(x, 0) = x$ para todo $x \in X; H(A \times I) \subseteq A$; y $H(a, 1) = a_0$ para todo $a \in A$. Entonces la aplicación cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

7. Pruebe que:

   a) Todo subespacio compacto convexo de $\mathbb{R}^n$ es retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^n$.

   b) Si A es un retracto de X, entonces para todo Y espacio topológico, $A \times Y$ es retracto de $X \times Y$.

   c) Si X es un espacio conexo y $A \subseteq X$ es un subespacio discreto con más de un punto, entonces A no es un *retracto débil* de X, es decir, $\nexists\, r : X \to A$ continua tal que $r \circ i \simeq \mathrm{id}_A$.

8. Un subespacio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ que es convexo tiene a cualquiera de sus puntos como retracto por deformación fuerte.

9. Sean X, Y espacios topológicos. Sea $[X, Y]$ el conjunto de clases homotópicas de funciones continuas de X en Y. Pruebe que:

   a) Si Y es contráctil, entonces $[X, Y]$ tiene un sólo elemento.
   b) Si X es contráctil e Y arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene un sólo elemento.
   c) Hay una biyección natural $[*, Y] \to \pi_0(Y)$.
   d) Más generalmente, si Y es contráctil, entonces hay una biyección natural $[Y, X] \to \pi_0(X)$.
   e) Si X' es otro espacio y $X \simeq X'$, entonces hay una biyección entre $\pi_0(X)$ y $\pi_0(X')$.

10. Sea $f : X \to Y$ una función continua y sea Z un espacio topológico. Definimos aplicaciones

$$f^* : [g] \in [Y, Z] \mapsto [g \circ f] \in [X, Z]$$

   y

$$f_* : [g] \in [Z, X] \mapsto [f \circ g] \in [Z, Y].$$

   a) Las funciones f^* y f_* están bien definidas.
   b) Si $f' : X \to Y$ es otra función continua y $f \simeq f'$, entonces $f^* = f'^*$ y $f_* = f'_*$.
   c) Si f es una equivalencia homotópica, entonces f^* y f_* son biyecciones.

11. Sea X el *peine*, esto es, el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = 0 \vee x^{-1} \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}.$$

   Sea $x_0 = (0, 1) \in X$.

   a) El espacio X es contráctil.
   b) No existe una homotopía *relativa a* x_0 entre la identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ y la función constante $c : x \in X \mapsto x_0 \in X$.

   Esto nos dice que toda contracción de X a x_0 mueve al punto x_0.

   c) Por otro lado, el espacio Y que resulta de pegar dos copias de X identificando los puntos x_0 en un solo punto *no* es contráctil.
   d) La inclusión $i : X \to [0, 1] \times [0, 1]$ es una equivalencia homotópica pero no un retracto.

12. Si X es un espacio, el *cono* de X es el espacio $CX = X \times I/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia $(x, 1) \sim (y, 1)$ para todo par de puntos x, $y \in X$. Si $x \in X$ y $t \in I$, escribimos $[x, t] \in CX$ a la clase de equivalencia de (x, t) en $X \times I$.

   a) La función $i : x \in X \mapsto [x, 0] \in CX$ es continua, inyectiva y cerrada.
   b) El espacio CX es contráctil.
   c) X es contráctil si y sólo si $i : X \to CX$ es un retracto.
   d) $f : X \to Y$ es homotópica a una función constante si y sólo si f se puede extender a una función continua $\bar{f} : CX \to Y$.

El grupo fundamental

13. Sea X es un espacio, $x_0 \in X$ y

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha \in C(I, X) : \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

   con la topología de subespacio de $C(I, X)$ (con la topología compacto-abierta). Pruebe que hay una biyección $\pi_0(\Omega(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0)$.

14. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, sea X un espacio y sea $x_0 \in X$. Consideremos sobre el conjunto $C((S^1, 1), (X, x_0))$ de las funciones continuas de pares $(S^1, 1) \to (X, x_0)$ la relación de equivalencia $\simeq_{\{1\}}$ de homotopía relativa a $\{1\} \subseteq S^1$, y notemos $[(S^1, 1), (X, x_0)]$ al conjunto de clases de equivalencia de $\simeq_{\{1\}}$. Entonces hay una biyección $[(S^1, 1), (X, x_0)] \to \pi_1(X, x_0)$.

15. Sea X un espacio, sea $A \subseteq X$ un subespacio y sea $i : A \to X$ la inclusión.

    a) Si $r : X \to A$ es una retracción, entonces cualquiera sea $a_0 \in A$ el homomorfismo $r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ es un epimorfismo y el homomorfismo $i_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ es un monomorfismo.

    b) Si A es un retracto por deformación , entonces para todo $a_0 \in A$ se tiene que $\pi_1(X, a_0) \cong \pi_1(A, a_0)$.

16. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio y $f : A \to X$ una función continua. Pruebe que si f se extiende a una función $g : \mathbb{R}^n \to X$, entonces para todo $a \in A$, el morfismo $f_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, f(a))$ es el morfismo cero.

17. Pruebe que $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ es isomorfo a $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.

18. Sea $(G, \cdot, e)$ un grupo topológico. Si α, $\beta \in \Omega(G, e)$, sea

    $$\alpha \odot \beta : t \in I \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t) \in G.$$

    Esto define una operación $\odot$ en el conjunto $\Omega(G, e)$ que hace de él un grupo.

    a) La operación $\odot$ induce una operación, que también notamos $\odot$, sobre $\pi_1(G, e)$ y con ésta $\pi_1(G, e)$ es un grupo.

    b) Esta estructura de grupo coincide con la estructura usual de $\pi_1(G, e)$.

    c) $\pi_1(G, e)$ es un grupo abeliano.