Topología

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 6

Espacios de adjunción

Sean X e Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado, $f : A \to Y$ una función continua, de manera que podemos construir el espacio $X \cup_f Y$, junto con funciones naturales $\bar{i} : Y \to X \cup_f Y$ y $\bar{f} : X \to X \cup_f Y$.

1. Pruebe que Y es un retracto de $X \cup_f Y$ si y sólo si existe una función $g : X \to Y$ tal que $g|_A = f$. Deduzca que si A es un retracto de X, entonces Y es un retracto de $X \cup_f Y$.

2. Si X e Y son compactos, entonces $X \cup_f Y$ es compacto.

3. Si X e Y son T_1, entonces $X \cup_f Y$ es T_1

4. (a) Si A es no vacío y X e Y son conexos entonces $X \cup_f Y$ es conexo.
   (b) Si A es no vacío y X e Y son arcoconexos entonces $X \cup_f Y$ es arcoconexo.
   (c) Si Y es conexo y si A interseca cada componente conexa de X, entonces $X \cup_f Y$ es conexo.
   (d) Si A es conexo y no vacío y $X \cup_f Y$ es conexo, entonces Y es conexo.

5. Si $X \subseteq X'$ e $Y' \subseteq Y$ son subespacio tales que $A \subseteq X'$ y $f(A) \subseteq Y'$ entonces $X' \cup_f Y'$ es subespacio de $X \cup_f Y$.

6. (a) Sean Y' un espacio topológico y $g : Y \to Y'$ una función continua. Como Y puede verse como un subespacio cerrado de $X \cup_f Y$, podemos construir el espacio $(X \cup_f Y) \cup_g Y'$. Podemos, por otro lado, construir el espacio de adjunción $X \cup_{g \circ f} Y'$. En estas condiciones, hay un homeomorfismo natural $(X \cup_f Y) \cup_g Y' \cong X \cup_{g \circ f} Y'$.
   (b) Sea ahora $k : X \to X'$ una inclusión cerrada, de manera que tiene sentido el espacio de adjunción $X' \cup_f Y$. Entonces $X' \cup_f Y \cong X' \cup_{\bar{f}} (X \cup_f Y)$ naturalmente.

7. Sean X e Y espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función continua. Sea $f' : X \times \{0\} \to Y$ definida por $f'(x, 0) = f(x)$. Como $X \times \{0\}$ es un subespacio cerrado de $X \times I$, podemos definir el espacio de adjunción $M(f) = Y \cup_{f'} (X \times I)$, que se denomina el *cilindro* de f. El *cono* de f se define como $C(f) = M(f)/(X \times \{1\})$.

   Pruebe que si X e Y son T_2, entonces $M(f)$ y $C(f)$ son T_2.