Topología

Segundo cuatrimestre - 2013

Práctica 1

Espacios topológicos

Ejemplos

1. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Muestre que

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

   es una topología sobre Y. Llamamos a τ_Y la *topología inducida* por τ sobre Y o la *topología subespacio*.

2. Sea X un conjunto infinito, sea $x_0 \in X$ y sea $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X que tienen complemento finito o que no contienen a x_0. Muestre que τ es una topología y describa sus cerrados.

3. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los cerrados acotados de $\mathbb{R}$ en su topología usual, junto con $\mathbb{R}$. Pruebe que existe una topología en $\mathbb{R}$ para la cual $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los cerrados.

4. Un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ se dice *radialmente abierto* si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ y compárela con la topología usual.

Construcción de topologías

5. Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos $\mathcal{F}$ en X* es una regla que a cada elemento $x \in X$ asigna una familia $\emptyset \neq \mathcal{F}_x \in \mathcal{P}(X)$ de manera que:

   (E1) $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}_x$;

   (E2) si $A \subseteq B$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $B \in \mathcal{F}_x$;

   (E3) si A, $B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$;

   (E4) dado $A \in \mathcal{F}_x$, existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{F}_y$ para todo $y \in B$.

   Pruebe que:

   (a) Si (X, τ) es un espacio topológico y para cada $x \in X$ definimos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$

   entonces $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X.

   (b) Si $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X y definimos

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ es } A \in \mathcal{F}_x\} \cup \{\emptyset\},$$

   entonces τ es una topología sobre X.

   (c) Las construcciones del item (a) y del item (b) son inversas.

6. Sea X un conjunto. Una función $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un *operador de clausura en X* si

(C1) $c(\emptyset) = \emptyset$;

(C2) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \subseteq c(A)$;

(C3) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(c(A)) = c(A)$;

(C4) si A, $B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$;

Pruebe que:

(a) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$$

es un operador de clausura en X.

(b) Si $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador de clausura en X, entonces el conjunto

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$

es una topología sobre X.

(c) Las construcciones del item (a) y del item (b) son inversas.

7. Sea X un conjunto y sea $B \subseteq X$. Pruebe que la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

es un operador de clausura en X. Describa los abiertos de la topología correspondiente.

Clausura, interior, frontera

8. Pruebe las siguientes inclusiones y halle ejemplos en los que sean estrictas.

(a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

(b) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$;

(c) $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$;

(d) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^\circ \subseteq (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)^\circ$;

(e) $(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)^\circ \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^\circ$.

9. *Topología del complemento finito.* Sea X un conjunto. Sea $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Pruebe que τ es una topología sobre X. Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a esta topología.

10. Sea X un conjunto no vacío y sea $x_0 \in X$. Pruebe que:

(a) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X.

(b) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$ es una topología sobre X.

Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a cada una de estas topologías.

11. *Topología del orden.* Considere el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X.

(a) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,

(d) $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,

(e) $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

12. Pruebe que todo cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

El reticulado de topologías, bases y subbases

13. Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de topologías en X. Pruebe que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X?

14. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pruebe que existe una topología $\sigma(\mathcal{A})$ sobre X que cumple que

    - todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para $\sigma(\mathcal{A})$, y
    - si τ es una topología sobre X tal que todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para τ, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.

    En otras palabras, $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{A}$ (la mínima en el orden dado por la inclusión). La topología $\sigma(\mathcal{A})$ es la *topología generada* por $\mathcal{A}$.

    Describa la topología generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

15. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Sea $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$ y sea $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$ donde $R_x = \{y \in Y : x < y\}$. Pruebe que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ es una sub-base para la topología del orden.

16. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

    $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}$,
    $\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathcal{B}_7 = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus B$ es finito$\}$.

    (a) Muestre que cada una de la colecciones $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_7$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$ y compare las topologías correspondientes.

    (b) Muestre que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una subbase para la topología generada por $\mathcal{B}_1$.

    (c) Determine la clausura del conjunto $K = \{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de las siete topologías.

17. Sea $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Muestre que $\mathcal{B}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$. Describa el interior de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a ella.

18. *Topología Zariski.* Considere el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k (e.g. $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$),

    $$k[x] = k[x_1, \cdots, x_n].$$

    Para cada subconjunto $S \subset k[x]$ se define el conjunto algebraico dado por S como

    $$V(S) = (z_1, \cdots, z_n) \in k^n : p(z_1, \cdots, z_n) = 0 \ \ \forall p \in S.$$

    Verifique las siguientes propiedades:

(a) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S.

(b) $V(\{0\}) = k^n$ y $V(\{1\}) = \emptyset$. Si $S \subset T$, entonces $V(S) \supset V(T)$.

(c) Si $I, J \subset k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

(d) Si $\{I_a\}_{a\in A}$ es una familia de ideales, entonces $V(\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} V(I_\alpha)$ Los items b), c), d) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la topología de Zariski de k^n .

(e) Los conjuntos $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$ forman una base para dicha topología.

(f) Si $f \neq 0$ entonces D_f es denso.

Redes

19. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Pruebe que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

    (a) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a la constante.

    (b) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

    (c) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

    (d) Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Suponga que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k\in\Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Considere $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

    $$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \ \forall\beta \in \Lambda.$$

    Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x^\alpha_{k_\alpha}$ converge a x.

20. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Pruebe que

    $$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset A, \text{ y } x_\alpha \to x\}$$

21. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathscr{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Pruebe que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.

    Sugerencia: Para probar $\Rightarrow$), considere como conjunto dirigido el formado por los pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$ y U un entorno (abierto) de x que contiene a x_α.

Funciones continuas

22. Sean X, Y espacios topológicos. Pruebe que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \to Y$ es equivalente a pedir que f sea continua.

    (a) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathscr{F}_y$ $(y = f(x))$ existe $B \in \mathscr{F}_x$ tal que $f(B) \subset A$

    (b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \to x$ se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$

    (c) Para todo $A \subset X$ se tiene $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

    (d) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

    (e) Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

23. Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E, ie,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Pruebe que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E.

24. (a) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Pruebe que si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.
    (b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Pruebe que g es un homeomorfismo.
    (c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Se define $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

    Pruebe que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

25. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.
    (a) Pruebe que el conjunto $\{x \in X : \ f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.
    (b) Sea $h : X \to Y$ la función $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Pruebe que h es continua.

26. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.
    (a) Pruebe que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.
    (b) Pruebe que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
    (c) Encuentre un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
    (d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α. Muestre que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.