**PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)**

Práctica 6 - Markov.

1. El ascensor de un edificio con planta baja y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. Definimos

   $X_n$ = piso en el que el ascensor finaliza el viaje n-ésimo.

   Supondremos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en la planta baja.

   *a*) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   *b*) Dibujar el grafo asociado.

   *c*) Simular una cadena con estas características.

   *d*) Si en este momento el ascensor se encuentra en el piso 1, calcular la probabilidad de que luego de tres viajes termine en pb.

   *e*) Si luego de cada reparación técnica el ascensor tiene las mismas chances de arrancar en cada piso, calcular la probabilidad de que en su segundo viaje termine en el piso 2.

   *f*) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos? Responda esta pregunta usando dos métodos: simulación y sistemas de ecuaciones.

2. El precio de una acción se mueve día a día dentro de los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ (expresado en alguna unidad monetaria). Sea $X_n$ = precio de la acción el día $n$. Supondremos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov verificando: Si $X_n = j$ con $j = 2$ o 3, luego $X_{n+1} = j - 1$ con probabilidad 0,2 y $X_{n+1} = j + 1$ con probabilidad 0,8. Si $X_n = 1$ entonces $X_{n+1} = 2$ con probabilidad 1. Finalmente, si $X_n = 4$ entonces $X_{n+1} = 3$ con probabilidad 1.

   *a*) Escribir la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

   *b*) Dibujar el grafo asociado.

   *c*) Simular una cadena con estas características.

   *d*) Si hoy la acción tomó el valor 3, cuál es la probabilidad de que quede en baja mañana.

   *e*) Calcular el precio promedio de la acción en el largo plazo. Hagalo usando dos métodos: simulación y sistemas de ecuaciones.

3. Tenemos tres bolas blancas y tres bolas negras distribuidas al azar en dos urnas de forma tal que cada urna contiene tres bolas. En cada paso saco una bola de cada urna y las cambio de urna. Sea $X_n$ = Cantidad de bolas blancas que hay en la urna 1 en el paso $n$.

*a*) Dedique un buen rato a convencerse de que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov.

*b*) Encontrar la matriz de transición asociada a este problema.

*c*) Dibujar el grafo asociado a esta cadena.

*d*) Simular una cadena con estas características.

*e*) Usando el item anterior, y la ley de los grandes números para cadenas de Markov calcular en forma aproximada $P_{\nu_0}(X_k = j)$, donde $\nu_0$ es la probabilidad inicial con la que estamos trabajando.

4. Consideremos el siguiente experimento llamado **Esquema de Ehrenfest**.Tenemos $N$ bolitas numeradas distribuidas al azar en dos urnas. Elijo un número al azar entre 1 y $N$ y extraigo la bola con dicho número para luego cambiarla de urna. Este experimento se repite numerables veces.
Definimos

$X_k$ = Cantidad de bolas que hay en la primer urna después de la $k$-ésima vez que repito el experimento. ($k-$ ésima extracción)

$p_k(j)$ = la probabilidad de que la urna uno tenga $j$ bolitas después de la $k$-ésima extracción.

$p_k(i,j)$: considerando que después de la extracción $k-1$ la urna uno tiene $i$ bolas, la probabilidad de que tenga $j$ bolas después de la extracción $k$.

a) ¿Dependen del tiempo estas probabilidades?

b) Calcule estas probabilidades para $i, j \in \{0, 1, ..., N\}$ (A una matriz $P$ con estas entradas se la llama matriz de transición.)

c) Simular este experimento para $N = 10$, 50, 100. Es decir, para cada valor de $N$ obtener realizaciones de las variables $X_k$, $k = 1.....M$ con $M = 7$, $20, 1200$.

d) Usando el item anterior, y la ley de los grandes números para cadenas de Markov calcular en forma aproximada $P_{\nu_0}(X_k = j)$, donde $\nu_0$ es la probabilidad inicial con la que estamos trabajando.