PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Cadenas de markov

1. En una cierta región el tiempo atmosférico sigue la siguiente secuencia: Un día se denomina soleado (S) si el sol luce más de la mitad del día y se denomina soleado si lo hace menos. Por experiencia se sabe que si hay un día nublado es igual de probable que el día siguiente también sea nublado. Si el día es soleado hay una probabilidad de $\frac{2}{3}$ de que sea también soleado.

   a) Construya T la matriz de transición del proceso.

   b) Si hoy está nublado ¿Cuál es la probabilidad de que dentro de tres días esté también nublado? ¿y de que esté soleado?

   c) Si la probabilidad de que hoy esté nublado es 0,2 ¿Cuál es la probabilidad de que dentro de tres días esté también nublado? ¿y de que esté soleado? Comparar con el item anterior.

   d) Calcular T^5 y T^{10}. ¿Cuál es el límite de T^n si n tiende a infinito?

2. El precio de una acción se mueve día a día dentro de los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ (expresado en alguna unidad monetaria). Sea X_n = precio de la acción el día n. Supondremos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov verificando: si $X_n = j$ con $j = 2$ o 3, luego $X_{n+1} = j - 1$ con probabilidad 0,2 y $X_{n+1} = j + 1$ con probabilidad 0,8. Si $X_n = 1$ entonces $X_{n+1} = 2$ con probabilidad 1. Finalmente, si $X_n = 4$ entonces $X_{n+1} = 3$ con probabilidad 1.

   a) Hacer un programa que tenga como input la matriz de transición de la cadena, una probabilidad inicial llamada p, un número natural n y devuelva $x_1, x_2 ......x_n$ realizaciones de la cadena de Markov arrancando con la probabilidad inicial p. Un ejemplo de p podría ser $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$. Fijar la semilla con el set. seed.

   b) Usando el item anterior, asumiendo que existe, aproxime a la probabilidad invariante.

   c) Compare la aproximación del item anterior con el autovector correspondiente.

```
P<-matrix(c(0,1,0,0,0.2,0,0.8,0,0,0.2,0,0.8,0,0,1,0),nrow = 4, ncol = 4, byrow=TRUE)

valor_ini<-function(p)
{
prob<-c(0,p)
uu<-runif(1)
ini<-0
for(i in 1:length(p))
{
if( sum(prob[1:i])< uu &  uu < sum(prob[1:i+1]) )
ini<-i
}
ini
}

valor_ini(c(0.5,0.5,0,0))
p<-c(0.5,0.5,0,0)
```

```
cad<-function(P,p,n)
{
x<-rep(0,n)
x[1]<-valor_ini(p)
for(i  in 2:n)
{
x[i]<-valor_ini( P[x[i-1],] )
}
x
}

set.seed(123)
ca<-cad(P,p,120)#parte b)
unos<-rep(1,120)
uno<- sum( unos[ca==1] )/120
dos<- sum( unos[ca==2] )/120
tres<- sum( unos[ca==3] )/120
cuatro<- sum( unos[ca==4] )/120
aproximacion<-(c( uno,dos,tres,cuatro))
v1<- eigen(t(P))$vectors[,1]/sum(eigen(t(P))$vectors[,1])

> aproximacion
[1] 0.01666667 0.12500000 0.48333333 0.37500000
> v1
[1] 0.02380952 0.11904762 0.47619048 0.38095238
```