El objetivo de este ejercicio es utilizar la ley de los grandes numeros para aproximar integrales de funciones continuas en intervalos finitos, tal como se propone en un ejercicio de la practica de convergencia en distribución. Esta vez procuraremos aproximar la probabilidad de que una variable $Z \sim N(0;1)$ tome valores en un intervalo $[a;b]$. Es decir, queremos aproximar numericamente la siguiente integral

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \quad (1)$$

Para ello, suponiendo que somos capaces de generar variables uniformes en $[0,1]$, consideremos la siguiente propuesta:

(a) Sea U una variable con distribución uniforme en el intervalo $[0;1]$. Dados números a y b , encontrar α y β de forma tal que $Y = \alpha U + \beta$ tenga distribución uniforme en el intervalo $[a;b]$

(b) A partir de $U_1; U_2 ....U_n$ variables i.i.d. con $U_i \sim U[0;1]$, construir variables aleatorias $Y_i \sim U[a;b]$, y calcular el límite en probabilidad de

$$Vn = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-Y_i^2}{2}} .dt$$

c) ¿Cómo aproximaría la integral (1) mediante Vn?

(d) Genere n realizaciones independientes de variables $Y_1, Y_2 ....Y_n$ con $Y_i \sim U[a;b]$, con ellas calcule Vn y la aproximación dada en el item anterior para $n = 100$; 1000 y 50000 , cuando

a) a = -1.96 y b = 1.96.

b) a = -2 y b = 1.

c) a = 0 y b = 2.34.

(e) Comparar con resultados que obtendría usando la tabla normal.