Polinomios positivos y sumas de cuadrados

1. (a) Sea $f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 4xyz + 1$. Probar que $f(x,y,z) \geq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pero f no es una suma de cuadrados en $\mathbb{R}[x,y,z]$.

   (b) Sean $d, n \in \mathbb{N}$, d par, tales que $d \geq 4, n \geq 2$ y $(d,n) \neq (4,2)$. Hallar $f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ de grado d tal que $f(x_1,\dots,x_n) \geq 0$ para todo $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ pero f no es una suma de cuadrados en $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$.

2. (a) Probar que $\mathbb{R}(x)$ es un cuerpo real.

   (b) Sea $\mathcal{O} = \{\leq \mid (\mathbb{R}(x), \leq) \text{ es un cuerpo ordenado}\}$. A cada $\leq \in \mathcal{O}$ le asignamos el conjunto $\mathbb{R}_{\leq x} = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \subset \mathbb{R}$. Probar que para todos $\leq_1, \leq_2 \in \mathcal{O}$, $\mathbb{R}_{\leq_1 x} = \mathbb{R}_{\leq_2 x}$ implica $\leq_1 = \leq_2$.

   (c) Hallar $\{\mathbb{R}_{\leq x} \mid \leq \in \mathcal{O}\}$.

3. Sean $f_1(x) = x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 15x + 4$, $f_2(x) = 2x^3 + 10x^2 - 13x + 4 \in \mathbb{R}[x]$. Hallar todos los $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{<, =, >\}^2$ tales que el sistema

$$\begin{cases} f_1 & \varepsilon_1 & 0, \\ f_2 & \varepsilon_2 & 0, \end{cases}$$

   admite una solución en $\mathbb{R}$.

4. Sean $f_1, \dots, f_{m_1}, g_1, \dots, g_{m_2}, h_1, \dots, h_{m_3}, p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_k]$, $\mathcal{M}$ el monoide multiplicativo generado por $f_1, \dots, f_{m_1}$, $\mathcal{C}$ el cono generado por $g_1, \dots, g_{m_2}$ e $\mathcal{I}$ el ideal generado por $h_1, \dots, h_{m_3}$. Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{M}^2$, $N_1, N_2 \in \mathcal{C}$, $Z_1, Z_2 \in \mathcal{I}$, $e \in \mathbb{N}_0$ y $q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_k]$ tales que

$$S_1 p^{2e} + N_1 + Z_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad S_2 + N_2 + Z_2 + qp = 0.$$

   (a) Probar que existen $S \in \mathcal{M}^2$, $N \in \mathcal{C}$ y $Z \in \mathcal{I}$ tales que

$$S + N + Z = 0.$$

   (b) Hallar tales S, N y Z en función de $S_1, S_2, N_1, N_2, Z_1, Z_2, e$ y q.

5. (a) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen polinomios p_n, $q_n \in \mathbb{R}[x]$ que son sumas de cuadrados en $\mathbb{R}[x]$ y tales que

$$1 + \frac{1}{n} - x^2 = p_n + q_n(1 - x^2)^3.$$

   (b) Sean $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones formadas por sumas de cuadrados en $\mathbb{R}[x]$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad del item anterior. Probar que

$$\lim_{n \to \infty} \max\{\text{grado}(p_n), \text{grado}(q_n)\} = \infty.$$