Geometría Proyectiva - Recuperatorio Segundo Parcial

Segundo cuatrimestre de 2013 (12/12/2013)

Nombre y Apellido	L.U.	1	2	3	4	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Sea $P(t) = a_n t^n + \cdots + a_0$ un polinomio de grado $n \geq 1$ (esto es, $a_n \neq 0$). Definimos $f : S^1 \to S^1$ como

$$f(x,y) = \begin{cases} \varphi \circ P \circ \varphi^{-1}(x,y) & \text{si } (x,y) \in S^1 \setminus (0,1) \\ (0,1) & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

donde $\varphi(t) = \frac{1}{t^2+1}(2t, t^2-1)$ y $\varphi^{-1}(x,y) = \frac{x}{1-y}$. Probar que f es una función diferenciable.

2. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura $\kappa > 0$. Sea

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + r(\mathbf{n}(u)\cos v + \mathbf{b}(u)\operatorname{sen} v),$$

donde $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ es el vector normal y binormal de α. Si $r < 1/\kappa$ la imagen de φ se llama el tubo de radio r alrededor de α, y para lo que sigue suponemos que el tubo es una superficie y que φ es una parametrización.

   a) Probar que $N(\varphi(u,v)) = \mathbf{n}(u)\cos v + \mathbf{b}(u)\sin v$ es un vector normal unitario en cada punto del tubo.

   b) Probar que la curvatura de Gauss del tubo en un punto $\varphi(u,v)$ no depende de τ. Más precisamente, pruebe que la curvatura de Gauss es igual a

$$K_S = \frac{\kappa\cos(v)}{(r\kappa\cos(v) - 1)r},$$

   donde κ es la curvatura de α y τ es su torsión.

Sugerencia: Para hacer las cuentas utilice una base conveniente. Por si lo necesita, las ecuaciones de Frenet son las siguientes: $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$.

3. La Cardioide es la curva algebraica $C \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por la ecuación,

$$(x^2 + y^2 - y)^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

En cada punto singular, calcular su multiplicidad y líneas tangentes en $\mathbb{R}$.

4. Sean $C_F, C_G \subseteq \mathbb{C}^2$ las curvas definidas por

$$F = y^3 - x^2 - 2xy - 4y^2 + 2x + 5y - 2, \quad G = x^3 - 3x^2 - 2xy - y^2 + x.$$

En cada punto singular de C_F y C_G, calcular su multiplicidad y líneas tangentes en $\mathbb{C}$. También calcular las líneas asintóticas sobre $\mathbb{C}$.