Geometría Proyectiva - Recuperatorio Primer Parcial

Segundo cuatrimestre de 2013 (5/12/2013)

Nombre y Apellido	L.U.	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente cuádrica sea una hipérbola,
$$x^2 - y^2 - 2xy + ax + y = \frac{1}{8}.$$

2. Considere la circunferencia dada por:
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 5y^2 - 32x - 24y + 75 = 0\}$$
y la recta:
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + 3y = 5\}.$$
Probar que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son simultaneamente tangentes a C y L es una parábola.

3. Sea $p : I \to \mathbb{R}^2$ la curva plana dada en forma parámetrica por:
$$p(t) = (t, bt^2), \quad b \neq 0.$$
Sea $C(t)$ el círculo que tiene el mayor orden de contacto posible con la curva p en el punto $p(t)$, pruebe que: $Area(C(t))$ es un polinomio visto como función de t, calcúlelo y muestre que tiene un mínimo en $t = 0$.

4. Hallar condiciones necesarias y suficientes sobre $f : I \to \mathbb{R}$ para que la siguiente curva sea plana, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$,
$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), f(t)).$$
A partir de dichas funciones f, calcule el vector binormal de la curva en cada punto y el plano que la contiene.

5. Probar que si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva 2-regular, parametrizada por longitud de arco, y tal que $\alpha(t)$ y $\alpha''(t)$ son vectores paralelos para todo $t \in I$; entonces la traza de α esta contenida en el circulo de mayor radio de una esfera. Además calcule el radio de dicho circulo en función de la curva α.