Geometría Proyectiva

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2013

SUPERFICIES

(1) Calcule los coeficientes de la primera forma fundamental de las siguientes superficies paramétricas, en los puntos regulares.
  (a) Elipsoide: $r(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(u))$;
  (b) Paraboloide elíptico: $r(u, v) = (au \cos(v), bu \sin(v), u^2)$;
  (c) Paraboloide hiperbólico: $r(u, v) = (au \cosh(v), bu \sinh(v), u^2)$;
  (d) Hiperboloide: $r(u, v) = (a \sinh(u) \cos(v), b \sinh(u) \sin(v), c \cosh(u))$.

(2) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera S^2 en la parametrización dada por la proyección estereográfica.

(3) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana. Definimos el cilindro y el cono sobre α de la siguiente manera
  - $Cil_\alpha(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), v), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$.
  - $Con_\alpha(u, v) = (v\alpha_1(u), v\alpha_2(u), v), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$.

  Demostrar que ambas superficies son localmente isométricas al plano (en los puntos regulares).

  Sugerencia: Para el caso del cono, considerar la curva plana en $z = 1$ y luego normalizarla. Chequear que el cono obtenido es el mismo que se obtiene sin normalizar.

(4) Decimos que las curvas coordenadas de una parametrización $r(u, v)$ forman una *red de Tchebyshev* si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Una condición necesaria y suficiente para esto es que

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

  Demostrar que si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = 1, \qquad F = \cos\theta, \qquad G = 1,$$

  donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

(5) Toda superficie de revolución puede ser reparametrizada de manera que los coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = E(v), \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

(6) En un punto hiperbólico, las direcciones principales bisectan las direcciones asintóticas.

  Sugerencia: Analizar la indicatriz de Dupin.

(7) Si una superficie S es tangente a un plano P a lo largo de una curva $C \subset S$, entonces los puntos de C son puntos planares o parabólicos de S.

(8) Describa las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss de las siguientes superficies:
  (a) Paraboloide de revolución: $z = x^2 + y^2$;
  (b) Hiperboloide de revolución: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
  (c) Catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$.

(9) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son las curvaturas normales en un punto p de una superficie S en direcciones que forman ángulos de 0, $2\pi/m$, $\ldots$, $2(m-1)\pi/m$ respectivamente con una dirección principal, entonces $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = mH$, con H la curvatura media en p.

  Sugerencia: Use el teorema de Euler.

(10) Encuentre expresiones para la primera y segunda forma fundamental, para la curvatura de Gauss y la media, y estudie las direcciones principales en
  (a) una superficie reglada, y
  (b) en una superficie dada en forma implícita $f(x, y, z) = 0$.

(11) Determine las curvas asintóticas y las líneas de curvatura de la superficie

$$z = xy.$$

(12) (a) Determine una ecuación para la curva plana C que tiene la propiedad de que la longitud del segmento de la recta tangente entre el punto de tangencia y la intersección con una recta $L \subset \mathbb{R}^2$ que no corta la curva es constantemente 1. Esta curva es la *tractriz.*

(b) Por rotación de la tractriz alrededor de la recta L se obtiene una superficie S, que llamamos *pseudoesfera.* Determine si S es una superficie regular y encuentre una parametrización en un entorno de un punto regular. Muestre que la curvatura de Gauss en todo tal punto es -1.

(13) Sean $\phi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ y $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones y supongamos que

$$r(u, v) = (\phi(v)\cos(u), \phi(v)\sin(u), \psi(v))$$

es una parametrización de una superficie de revolución con curvatura Gaussiana constante k. Supongamos además que $\phi'^2 + \psi'^2 = 1$. Muestre que entonces

$$\phi'' + k\phi = 0.$$

Recíprocamente, muestre que para cada $k \in \mathbb{R}$ existe una superfice de revolución con curvatura de Gauss constante igual a k. Cuántas hay?

(14) Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = 1$ que intersecan perpendicularmente el plano xy están dadas por

$$\begin{cases} \phi(v) = C\cos v, \\ \psi(v) = \displaystyle\int_0^v \sqrt{1 - C^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

para alguna constante C. Determine el dominio de v y haga un gráfico de la curva cortada en el plano xz cuando $C = 1$, $C > 1$ o $C < 1$. Qué superficie obtenemos cuando $C = 1$?

(15) Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = -1$ son de uno de los siguientes tipos:

$$\begin{cases} \phi(v) = C\cosh v, \\ \psi(v) = \displaystyle\int_0^v \sqrt{1 - C^2\sinh^2 t}\,\mathrm{d}t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(v) = C\sinh v, \\ \psi(v) = \displaystyle\int_0^v \sqrt{1 - C^2\cosh^2 t}\,\mathrm{d}t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(v) = e^v, \\ \psi(v) = \displaystyle\int_0^v \sqrt{1 - e^{2t}}\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Determine el dominio de v y haga gráficos de las intersecciones de estas superficies con el plano xz.

(16) Las únicas superficies de revolución con curvatura constante nula son el cilindro circular recto, el cono circular recto y el plano.

(17) Los puntos en la superficie obtenida por la rotación de la curva $y = x^2 - 1$ alrededor del eje x, son puntos parabólicos.