Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2013

Cuádricas

(1) Para cada una de las siguientes cónicas encuentre: forma canónica afín (tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$), forma canónica ortogonal, centro, puntos singulares. Graficar (en el caso real) en el sistema original de coordenadas.
  (a) $x^2 + y^2 = 1$;
  (b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = -1$;
  (c) $xy - x + 3y = 2$;
  (d) $x^2 - y^2 + 4x - 2y = 4$;
  (e) $2x^2 + xy - y^2 = 0$;
  (f) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -5$.

(2) Para cada una de las siguientes cuádricas encuentre: forma canónica afín (tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$), forma canónica ortogonal, centro, puntos singulares. Graficar.
  (a) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 6x - 6z + 5 = 0$;
  (b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 6x - 6z + 6 = 0$;
  (c) $-4x^2 + 2yz - 8x + 2y - 4 = 0$;
  (d) $-4x^2 + 2yz - 8x + 2y - 5 = 0$;
  (e) $-4x^2 + 2yz - 8x + 2y - 3 = 0$;
  (f) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25z^2 - 16x - 20y = 0$;
  (g) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 25z^2 - 16x - 20y = 0$;
  (h) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 25z^2 - 16x - 12y = 0$.

(3) Demuestre que las secciones planas de un cono en $\mathbb{R}^3$ son cónicas. Interprete la clasificación de las cónicas en términos de la posición del plano utilizado para la sección.

(4) Dados dos puntos p, $q \in \mathbb{R}^2$ y un número real a tal que $2a > d(p, q)$, definimos
$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) + d(x, q) = 2a\}.$$
  (a) Demostrar que el conjunto $\mathcal{X}$ es una elipse. Llamamos a los puntos p y q sus focos.
  (b) Ver que el punto medio entre los focos es el centro de la elipse.
  (c) Pruebe que toda elipse puede obtenerse por esta construcción.

(5) Si p, $q \in \mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}$ es tal que $0 < 2a < d(p, q)$, definimos
$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) - d(x, q) = 2a\}.$$
Probar que el conjunto $\mathcal{X}$ es una hipérbola y que toda hipérbola puede obtenerse de esta forma.

(6) Mostrar que dada una elipse que refleja los rayos de luz como un espejo plano (es decir, con el mismo ángulo de incidencia que de reflexión), los rayos emitidos desde un foco pasan, luego de reflejarse, por el otro.

(7) Si $p \in \mathbb{R}^2$ y $L \subset \mathbb{R}^2$ es una recta que no contiene a p, sea
$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) = d(x, L)\}.$$
  (a) Probar que el conjunto $\mathcal{X}$ es una parábola.
  (b) Ver que toda parábola se obtiene de esta forma.
  (c) Llamamos a p el *foco* de la parábola y a la recta L su *eje*. Supongamos que una parábola refleja la luz como un espejo plano, demuestre que los rayos que tienen dirección perpendicular al eje y que provienen del

semiespacio que contiene al foco, se concentran, luego de reflejarse, en dicho foco.

(8) Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la cónica de ecuación cuadrática $F = 0$ y sea $p \in \mathbb{R}^2 - C$. Determine los puntos $x \in C$ tales que la recta tangente a C en x pasa por p.

(9) Demostrar que por cada punto del hiperboloide de una hoja de ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

pasan dos rectas contenidas en él.

(10) Si L es una recta y Q una cuádrica, probar que el conjunto $L \cap Q$ sólo puede ser uno de los siguientes:

- $L \cap Q = \emptyset$
- $L \cap Q = \{A\}$ (un punto)
- $L \cap Q = \{A, B\}$ (dos puntos)
- $L \cap Q = L$

(11) Hallar la ecuación del hiperplano tangente a las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$ en los puntos indicados:

(a) $Q : 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 + x_2 - 2 = 0$ $\quad P = (1, 0)$
(b) $Q : x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 + 5x_2 - 10 = 0$ $\quad P = (-2, 0)$
(c) $Q : 3x_1^2 - 5x_3^2 + 3x_1x_2 + 6x_1 - x_2 = 0$ $\quad P = (1, -2, 1)$
(d) $Q : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ $\quad P = (0, 0, 1)$
(e) $Q : 6x_1x_2 - 4x_1 + 9x_2 - 6 = 0$ $\quad P = (-\frac{3}{2}, 0, 0)$

(12) Determinar, si es posible, todos los valores de a, para que la siguiente cuádrica de $\mathbb{R}^3$

$$Q : 2x_1^2 + 3x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_3 - 5 = 0$$

(a) sea un hiperboloide de una hoja.
(b) sea un par de planos paralelos.
(c) sea un cilindro parabólico.
(d) sea un paraboloide elíptico.
(e) sea un elipsoide.
(f) sea un cono.

(13) **Proyección estereográfica.** Considérese la esfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$$

y sea $N = (0, 0, 2) \in S$ (polo norte). Se define $\pi : S - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ como $\pi(x) = q \in \mathbb{R}^2$ si q es la intersección de la recta que pasa por N y x con el plano $z = 0$. Mostrar que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S$ está dada por

$$\pi^{-1}(u, v) = (\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4}).$$

Generalizar a una esfera en $\mathbb{R}^n$.

(14) **Proyección estereográfica generalizada.** Sea $Q = (F = 0) \subset \mathbb{R}^n$ una cuádrica. Tomemos $p \in Q$ un punto regular y un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ que no contiene a p. Definimos $\pi : Q - \{p\} \to H$ por $\pi(x) = L(x, p) \cap H$, donde $L(x, y)$ denota la recta que pasa por x e y. Esta relación no es necesariamente una función ya que para algunos $x \in Q - \{p\}$ puede ser que $L(x, p) \cap H = \emptyset$. Determinar el dominio, imagen y región de inyectividad de π. Calcular su inversa en donde tenga sentido.

(Se sugiere comenzar por los casos $n = 2$ y $n = 3$. Puede ser útil considerar primero las formas canónicas).

(15) (*) **Secciones hiperplanas.** Si $Q = (F = 0)$ es una cuadrica en $\mathbb{R}^{n+1}$ (podemos suponer que Q es una de las formas canónicas) cuáles son los tipos de cuádricas en $\mathbb{R}^n$ que se obtienen intersecando Q con diversos hiperplanos afines de $\mathbb{R}^{n+1}$?

(16) (*) **Subespacios isotrópicos.** Sea $Q = (F = 0)$ una cuádrica en $\mathbb{R}^n$. Si S es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$, decimos que S es isotrópico (respecto a Q) si $S \subset Q$, o sea, $F(S) = \{0\}$. Definimos el número natural $\delta(F)$ como el máximo de las dimensiones de los espacios isotrópicos de $Q = (F = 0)$ (si Q no tiene espacios isotrópicos entonces definimos $\delta(F) = -1$). Calcular δ para cada una de las formas canónicas.

(17) (*) **Degeneraciones de cuádricas.** Sea C el conjunto de los polinomios reales de grado dos en n variables, provisto de la acción usual del grupo afín $G = A(n, \mathbb{R})$. Las órbitas de la acción de G en C corresponden a las formas canónicas del teorema de clasificación afín de cuádricas. Para cada órbita $\alpha \subset C$, caracterizar las órbitas $\beta \subset C$ tales que β está contenida en la clausura de α.

(18) **(*) Formas bilineales (I).** Sea U un espacio vectorial y b una forma bilineal simétrica en U. Sea S un subespacio de U tal que b restringida a S es no-degenerada. Entonces U es la suma directa de S y $S^{\perp}$. (no hace falta suponer que b es no-degenerada) *Sugerencia: Elegir una base de S.*

(19) **(*) Formas bilineales (II).** Sea U un espacio vectorial sobre los numeros reales y b una forma bilineal simétrica en U. Decimos que U es un espacio hiperbólico si b es no-degenerada y la signatura tiene el mismo numero p de 1's que de -1. Esto implica que $\dim U = 2p$ y la signatura se escribe $(2p, p)$. Si $\dim U = 2$ decimos que U es un plano hiperbólico.

(a) Un espacio hiperbólico de dimension $2p$ se puede descomponer como suma directa ortogonal de p planos hiperbólicos.

(b) Si U es un plano hiperbólico, demostrar que el conjunto de vectores isotrópicos es la union de dos rectas por el origen. En particular, existen vectores isotrópicos.

(c) Si U es un espacio hiperbólico de dimension $2p$, demostrar que existen subespacios isotrópicos de dimension p. *Sugerencia: Tomar una descomposición de U como en a). Elegir un vector isotrópico en cada sumando. Tomar el espacio generado por estos p vectores.*

(d) Sea V un espacio vectorial sobre los reales y sea b una forma bilineal simétrica no-degenerada en V. Sea $S \subset V$ un subespacio isotrópico. Demostrar que existe un subespacio $U \subset V$ hiperbólico tal que $S \subset U$. Deducir que si la signatura de b en V es (r, p) entonces $\dim S \leq \min\{p, r - p\}$, $(r = \dim V)$. En particular, los espacios isotrópicos de c) son maximales.

(e) Extender d) al caso en que no se supone b no-degenerada.

(f) Enunciar y demostrar resultados similares sobre el cuerpo de los numeros complejos.