Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2013

Ecuación del Calor

1. Sea u una solución regular de $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

   (a) Mostrar que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) Mostrar que $v(x,t) = x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también resuelve la ecuación del calor.

2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.

   (a) *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones calóricas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es calórica.

   (b) *Traslaciones:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $u(x-\xi, t-\tau)$ es calórica.

   (c) *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x,t,\alpha)$ es calórica para cada α, entonces $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x,t,\alpha)$ es calórica para cada α.

   (d) *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x,t,\alpha)$ es calórica para cada α, entonces $\int_a^b u(x,t,\alpha)d\alpha$ es calórica.

   (e) *Diferenciación respecto a x y t:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $\frac{\partial^{|\alpha|+m}u}{\partial x^\alpha \partial t^m}(x,t)$ es calórica.

   (f) *Integración respecto x y t:* Si $u(x,t)$ es calórica, $n=1$, entonces $\int_{x_0}^x u(\xi,t)d\xi$ es calórica si $u_x(x_0,t) = 0$ y $\int_a^t u(x,\tau)d\tau$ es calórica si $u(x,a) = 0$.

   (g) *Convoluciones:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $\int u(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$ y $\int_a^b u(x,t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$ son calóricas.

3. (a) Si $\phi = \phi(x,t),\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0$, es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\phi(x,t) = w(|x|,t)$ con $w : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$), entonces ϕ satisface

$$\phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r = \phi_t \quad t > 0,\ r > 0. \tag{1}$$

   (b) Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse mediante el cambio $\psi = r\phi$ a la ecuación del calor unidimensional.

4. Para $i = 1, \dots, n$ consideramos $u_i = u_i(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$, soluciones de

$$\begin{cases} (u_i)_t &= (u_i)_{xx} \\ u_i(x,0) &= \varphi_i(x). \end{cases}$$

   Probar que si definimos para $x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$,

$$u(x,t) = u_1(x_1,t)u_2(x_2,t)...u_n(x_n,t)$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)...\varphi_n(x_n)$$

   entonces u es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ con $u(x,0) = \varphi(x)$.

5. Supongamos $n = 1$ y $u(x,t) \equiv v(x^2/t)$.

   (a) Mostrar que $u_t = u_{xx}$ si y sólo si

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0. \tag{2}$$

   (b) Verificar que la solución general de (2) es

$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-s/4}s^{-1/2}ds + C_2.$$

(c) Derivar $v(x^2/t)$ respecto a x y seleccionar C_1 adecuadamente para obtener la solución fundamental Φ.

6. Sea

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0),$$

donde α y β son constantes.

(a) Verificar que u satisface la ecuación del calor si y sólo si v satisface

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0,$$

para $y = t^{-\beta} x$.

(b) Verificar que si $\beta = 1/2$, v satisface

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0.$$

(c) Verificar que si v es radial, i.e. $v(y) = w(|y|)$ para $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces w satisface

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

donde $r = |y|$, $' = \frac{d}{dr}$.

(d) Tomar $\alpha = n/2$ y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

7. *Método de similaridad.*

(a) Hallar todas las soluciones de la ecuación del calor unidimensional que satisfacen

$$\phi(x,t) = \phi(\lambda x, \lambda^2 t),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Mostrar que el método de similaridad dado en (a) también puede aplicarse a la ecuación del calor no lineal

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad K \in C^1.$$

8. (a) Sea $a(t) > 0$ una función continua y sea $u(x,t)$ una solución regular de $u_t = a\Delta u$. Mostrar que existe un cambio de variables $t = \phi(\tau)$ tal que $U(x,\tau) = u(x,\phi(\tau))$ es solución de la ecuación del calor.

(b) Sea $b(t) \in \mathbb{R}^n$ continua y sea $u(x,t)$ solución regular de $u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u$. Mostrar que existe un cambio de variables $x = \psi(y,t)$ tal que $U(y,t) = u(\psi(y,t),t)$ es solución de la ecuación del calor.

(c) Sea $c(t) \in \mathbb{R}$ continua y sea $u(x,t)$ solución regular de $u_t + cu = \Delta u$. Mostrar que existe $\varphi(t)$ derivable, tal que $U(x,t) = u(x,t)\varphi(t)$ es solución de la ecuación del calor.

(d) Escribir una fórmula explícita para una solución de

$$\begin{cases} au_t + cu &= \Delta u + b \cdot \nabla u + f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ u &= g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{cases}$$

donde $c(t) \in \mathbb{R}, a(t) > 0$ y $b(t) \in \mathbb{R}^n$ son continuas.

9. *Principio de Duhamel*

Sea u la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = g(x,t) & \text{en } (0,L) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

Probar que u puede ser representada en la forma

$$u(x,t) = \int_0^t \Phi(x,t;s)\,ds,$$

donde Φ es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} = 0 & \text{en } (0,L)\times(s,+\infty), \\ \Phi(0,t;s) = \Phi(L,t;s) = 0 & \text{en } t > s, \\ \Phi(x,s;s) = g(x,s) & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

10. Usar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} &= g(x,t), \quad x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

donde f y $g(\cdot,t)$ para cada t fijo, son funciones de $\mathcal{S}$.

11. Deduzca la fórmula explícita

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} h(s)ds$$

para la solución de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0, \quad x>0,\ t>0, \\ u(x,0) &= 0, \\ u(0,t) &= h(t), \end{cases}$$

donde $h(0)=0$. (Pista: Sea $v(x,t) = u(x,t) - h(t)$ y extienda a v por imparidad.)

12. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0, \quad x>0,\ t>0, \\ u_x(0,t) &= 0, \\ u(x,0) &= f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x,t) = \int_0^\infty N(x,\xi,t)f(\xi)d\xi,$$

donde $N(x,\xi,t) = K(x-\xi,t) + K(x+\xi,t)$ y K es la solución fundamental de la ecuación del calor. (Pista: Extender f por paridad a $-\infty < x < 0$ y resolver el problema de valores iniciales para la f extendida.)

13. Sea $u(x,t)$ solución del problema

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx}, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

dada por la convolución de φ en la variable x con la solución fundamental. Probar que si $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$, entonces $u(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R})$ $\forall t>0$ y

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx, \quad \forall t>0.$$

14. Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto. Notamos $U_T = U\times(0,T)$ y $\Gamma_T = \big(\overline{U}\times\{0\}\big)\cup(\partial U\times(0,T))$ la frontera parabólica de U_T. Decimos que $v\in C^{2,1}(U_T)\cap C(\overline{U_T})$ es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ en } U_T.$$

(a) Probar que $\max_{U_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.

(b) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un función suave y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v = \phi(u)$, entonces v es una subsolución.

(c) Probar que $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ es una subsolución si u es una solución de la ecuación del calor.

15. (a) Sea $Q_R(x,t) = B(x,R) \times (t - R^2, t)$. Probar que si $u(x,t)$ es solución de la ecuación del calor en $Q_2(0,0)$, existe una constante C universal tal que

$$\max_{Q_1(0,0)} |\nabla_x u(x,t)| \leq C \max_{Q_2(0,0)} |u(x,t)|.$$

(b) Con la notación del ejercicio anterior, probar que si $K \subset \overline{U_T} \setminus \Gamma_T$, K compacto, existe entonces una constante C que depende de $dist(K, \Gamma_T)$ tal que

$$\max_{K} |\nabla_x u(x,t)| \leq C \max_{U_T} |u(x,t)|.$$

16. Sea $U_T = U \times (0,T)$ y sean u_n soluciones regulares del siguiente problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n &= 0 \quad \text{en } U_T \\ u_n &= f_n \quad \text{en } \Gamma_T, \end{cases}$$

donde Γ_T es la frontera parabólica de U_T. Probar que si $f_n \to f$ uniformemente en Γ_T, entonces existe u regular tal que $u_n \to u$ uniformemente sobre U_T y u es solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{en } U_T \\ u &= f \quad \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

17. Sea u una solución acotada de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+1}$. Probar que u es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que u sea acotada?

18. Definimos

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i son continuos, $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz $A = (a_{ij})$ es definida positiva. Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado, definimos $U_T = U \times (0,T]$ y $\Gamma_T = \overline{U_T} - U_T$ la frontera parabólica de U_T. Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ satisface

$$u_t - \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en } U_T,$$

entonces

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

19. Con la notación del ejercicio anterior, sea $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ la solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(x) \quad \text{en } U_T, \\ u &= 0 \quad \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

Probar que si $f \leq 0$, entonces $u_t \leq 0$.

(Hint: Definir $w(x,t) = u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)$, calcular $w_t - \Delta w$ y aplicar el principio del máximo.)