Ecuaciones Diferenciales – 2° cuatrimestre 2013

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

1. Hallar, para $a \in \mathbb{R}$, la solución de

$$\begin{cases} u_t + au_x &= u^2 \quad t > 0, \\ u(x,0) &= x \end{cases}$$

2. Hallar la solución de

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y &= t \qquad\qquad t > 0, \\ u(x,y,0) &= g(x,y), \end{cases}$$

   con $a, b \in \mathbb{R}$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$.

3. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} u_t + u_{x_1} + \cdots + u_{x_n} &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} &= f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

4. Resolver

$$\begin{cases} u_{x_1} + \cdots + u_{x_n} &= e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=0} &= x_2 \end{cases}$$

5. Resolver

$$\begin{cases} x \cdot \nabla u &= |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=1} &= 3x_n. \end{cases}$$

   Estudiar el dominio de definición de la solución.

6. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

   es $u(x,y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.

   Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x = u$.

   ¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

7. Hallar la solución del problema siguiente

$$\begin{cases} y\, u_x + u_y = 2 \\ u\lfloor_{\{x=0\}} = y \end{cases}$$

   Si la solución no está definida para todo (x,y), dar una explicación geométrica de a qué se debió.

8. Probar que no existe solución de la ecuación

$$u_x + u_y = u$$

   que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

9. Probar que la solución de la ecuación

$$u_x + u_y = u^2$$

   cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = u$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

10. Hallar la solución de
$$\begin{cases} u_t + uu_x = 1 \\ u\lfloor_{\{t=0\}} = x \end{cases}$$
Ver que la solución está definida para todo $t > -1$. Analizar la razón de que no esté definida globalmente.

11. Sean f, g funciones $C^1(\mathbb{R})$. Probar que la solución de
$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$
está dada implícitamente por
$$u = g(x - f'(u)t).$$
Analizar la región de validez de la solución si $f \in C^2(\mathbb{R})$ y convexa y g es monótona.

12. (a) Hallar una solución débil continua del problema
$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0,$$
con $u(x,0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(b) Hallar una solución débil del problema
$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0,$$
con $u(x,0) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 0 & x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

(c) Hallar una solución débil del problema
$$u_t + e^{2u}u_x = 0$$
con
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

13. Sea $\alpha > 1$. Probar que la función
$$u_\alpha(x,t) = \begin{cases} -1, & 2x < (-1-\alpha)t \\ -\alpha, & (-1-\alpha)t < 2x < 0 \\ \alpha, & 0 < 2x < (1+\alpha)t \\ 1, & x > (\alpha+1)t, \end{cases}$$
es solución débil de
$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 1, & x > 0 \\ u(x,0) = -1, & x < 0. \end{cases}$$