Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2013

Series de Fourier y Separación de variables

1. Sea f integrable en $[-p,p]$ y tal que $f(x+2p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que,

   (a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{a-p}^{a+p} f(t)\,dt = \int_{-p}^{p} f(t)\ dt$.

   (b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{2p}^{2p+x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$.

   (c) Si $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, entonces $g(x+2p) = g(x)$ si y sólo si
   $$\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 0$$

   (d) Si f es integrable y $2p-$periódica:
   $$\frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)(p-x)\,dx = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n\omega_0}$$
   donde b_n es un coeciente de Fourier de f y $\omega_0 = \pi/p$.
   `Sugerencia:` Desarrollar en serie la función $p - x$.

2. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de senos de f y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada para

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

   (b) $f(x) = x\ (0 \leq x < \pi)$

3. Resolver, separando variables, el problema de Dirichlet para el rectángulo:
$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \mathrm{A} \\ u(0,y) &= 0 \\ u(\pi,y) &= 0 \\ u(x,\mathrm{A}) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{cases}$$

4. Resolver en $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$:

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \\ u(x,0) &= x^2 \\ u(x,\pi) &= 0 \\ u_x(0,y) &= 0 \\ u_x(\pi,y) &= 0 \end{cases}$$

   Mostrar que la serie obtenida es solución del problema.

5. Resolver, analizando la validez de la solución, la ecuación de Laplace en un disco en $\mathbb{R}^2$.

   (a) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x| < 1 \\ u = f & \text{en } |x| = 1 \end{cases}$

   donde $f \in C^1(\{|x| = 1\})$. (Sug.: Pasar a coordenadas polares).

   (b) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x| < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f & \text{en } |x| = 1 \end{cases}$

   donde f es como en el item (a) y además $\int_{|x|=1} f dS = 0$, y u se anula en el origen.

   Probar que el item (b) no tiene solución si $\int_{|x|=1} f dS \neq 0$.

6. Verificar por el método de separación de variables, que el problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & Q := (0,1) \times (0,1) \\ u = 0 & \partial Q \end{cases}$$

   tiene como soluciones a

$$u_{k,j}(x,y) = \sin(\pi j x)\sin(\pi k y), \qquad \lambda_{k,j} = \pi(j^2 + k^2).$$

7. Resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu &= 0 \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ u(0,t) &= 0 \\ u(\pi,t) &= 0 \end{cases}$$

   Sugerencia: Proponer $v(x,t) = u(x,t)e^{ct}$.

8. Aplicar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de conducción de calor en un cilindro circular infinito.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 & B_1(0) \times (0, \infty) \\ u(x,t) &= 0 & \partial B_1(0) \times (0, \infty) \\ u(x,0) &= f(|x|) & B_1(0) \times \{t = 0\} \end{cases}$$

donde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Sugerencia: Pasar a coordenadas polares y, dado que el dato inicial es independiente de θ, buscar soluciones independientes de θ.

9. Hallar, usando el método de separación de variables, una solución del problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} &= 0 & 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(0,t) &= 0 & t > 0 \\ u(\ell,t) &= 0 & t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) & 0 < x < \ell \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) & 0 < x < \ell \end{cases}$$

10. Consideremos el siguiente problema en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u &= 0 & \text{en } B_1(0) \times (0, \infty) \\ u &= f & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u &= 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times (0, \infty) \end{cases}$$

(la solución representa el pequeño movimiento transversal de una membrana circular fija en sus extremos)

Mostrar que, cuando se buscan soluciones de la forma $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ al aplicar el método de separación de variables, se obtiene para R la ecuación:

$$(rR')' - \frac{m^2}{r} R + \lambda r R = 0$$

11. En los ejercicios anteriores, imponer condiciones sobre las funciones f, g (según corresponda), de modo tal que las series obtenidas sean efectívamente soluciones de los problemas.