

## Ecuaciones Diferenciales – 2º cuatrimestre 2013

### PRÁCTICA 0 – PRELIMINARES

1. Revisar los siguientes teoremas:

- (a) Teorema de la Función Inversa.
- (b) Teorema de la Función Implícita.
- (c) Teorema de Arzelá – Ascoli.
- (d) Teorema de la Partición de la Unidad.
- (e) Teorema de convergencia monótona de Beppo Levi.
- (f) Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
- (g) Lema de Fatou.

2. Diferenciación bajo el signo integral.

- (a) Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $V \subset \mathbb{R}^m$  medible,  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  medible y  $x_0 \in U$ . Si  $f(x, \cdot) \in L^1(V)$  para  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $f(\cdot, y)$  es diferenciable en  $|x - x_0| < \varepsilon$  para casi todo  $y \in V$  y existe  $g \in L^1(V)$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq g(y), \quad |x - x_0| < \varepsilon, \quad \text{a.e. } y \in V$$

con  $1 \leq j \leq n$  fijo, entonces la función  $F(x) = \int_V f(x, y) dy$  es derivable para  $|x - x_0| < \varepsilon$  respecto de  $x_j$ , y

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy.$$

- (b) Verificar que si  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  es una función continua en  $U \times \bar{V}$ , con  $V$  abierto acotado, entonces verifica las hipótesis del ítem anterior.

3. (a) Sean  $f, g$  derivables,  $h$  continua. Derivar

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s) ds.$$

- (b) Sean  $f, g$  derivables,  $h = h(x, s)$  continua y derivable respecto de  $x$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}$  acotada. Derivar

$$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, s) ds.$$

4. (a) Desigualdad de Hölder: Si  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

- (b) Desigualdad de Minkowsky: Si  $1 \leq p \leq \infty$ , entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

- (c) Desigualdad integral de Minkowsky: Si  $1 \leq p < \infty$ , entonces

$$\left( \int \left| \int f(x, y) dx \right|^p dy \right)^{1/p} \leq \int \left( \int |f(x, y)|^p dy \right)^{1/p} dx.$$

**Definiciones:** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Se define el *soporte* de  $f$  como  $\text{sop}(f) = \overline{\{x \in U: f(x) \neq 0\}}$ .

- $C^0(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ es continua}\} = C(U)$
- $C_c^0(U) := \{f \in C^0(U): \text{sop}(f) \text{ es compacto}\} = C_c(U)$
- $C^1(U) := \{f \in C^0(U): f \text{ es diferenciable en } U \text{ y } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(U), 1 \leq i \leq n\}$
- $C^k(U) := \{f \in C^1(U): \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(U), 1 \leq i \leq n\}, k \geq 1$
- $C^\infty(U) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U)$
- $C_c^k(U) = C^k(U) \cap C_c^0(U), k \geq 1$
- $C_c^\infty(U) = C^\infty(U) \cap C_c^0(U)$
- $C^k(\bar{U}) = \bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ \bar{U} \subset V}} C^k(V)$

**Notación:** La siguiente notación para las derivadas será de mucha utilidad. Sea  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multiíndice,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Definimos  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ . Entonces se denota, para  $f \in C^{|\alpha|}(U)$ ,

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

5. Dada  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau_{-h}f(x) := f(x+h)$ .

- (a) Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_{-h}f - f\|_p = 0$ .  
(Pista: usar que  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$   $1 \leq p < \infty$ ).
- (b) Mostrar que (a) no vale para  $p = \infty$ .

**Definición:** Dadas  $f, g$  medibles en  $\mathbb{R}^n$  se define la *convolución* de  $f$  y  $g$  como

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$$

para los  $x \in \mathbb{R}^n$  en donde la integral esté bien definida.

6. Desigualdad de Young.

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ .

7. Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces  $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y se tiene que  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ . Más aún,  $f * g$  es uniformemente continua.

**Definición:** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible. Definimos

$$L_{\text{loc}}^p(E) := \bigcap_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compacto}}} L^p(K).$$

8. Sean  $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$  y  $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$ ,  $|\alpha| \leq k$ .

9. (a) Sea

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Probar que  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

(b) Construir  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\text{sop}(\rho) \subset B(0, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

10. Sea  $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$ , y  $\forall \varepsilon > 0$ . Sea  $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$ . Probar que

(a) Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty \Rightarrow \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \rightarrow 0$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(b) Si  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $f$  uniformemente continua en  $V \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $\sup_{x \in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \rightarrow 0$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\forall V'$  compacto,  $V' \subset V$ .

(c) Si  $f$  es continua y acotada en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $f * \rho_\varepsilon$  tiende uniformemente a  $f$  en cada compacto de  $\mathbb{R}^n$ .

(d) Si además  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

(e) Calcular  $f * \rho_\varepsilon$  si  $f = \chi_{[a,b]}$  y  $\rho$  es la función del ejercicio 9 (a).

11. Demostrar que  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

Pista: las funciones de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con soporte compacto son densas en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

12. Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  y  $\int_\Omega f \varphi dx = 0 \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0$  c.t.p.

13. Si  $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  y  $\int f \varphi' dx = 0 \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f = \text{cte}$  c.t.p.

Pista: tomar  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\int g = 1$  y para cada  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , se verifica que  $\varphi(x) - (\int \varphi)g(x)$  es la derivada de una función  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

**Definición:** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Diremos que  $\Omega$  es un dominio con frontera  $C^r$  si es conexo y para todo  $x_0 \in \partial\Omega$  existe un entorno  $U$  de  $x_0$ , un entorno  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  y una función  $\phi \in C^r(V)$  tal que (salvo un reordenamiento de las variables) el dominio se describe como sigue:

$$\begin{aligned}\Omega \cap U &= \{x \in U : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V; x_n > \phi(x_1, \dots, x_{n-1})\}, \\ \partial\Omega \cap U &= \{x \in U : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V; x_n = \phi(x_1, \dots, x_{n-1})\}.\end{aligned}$$

### Notaciones:

- El operador *nabla* se define como

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

- Dada  $u \in C^1(U)$  se define el *gradiente* de  $u$  como

$$\text{grad}(u) := \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

- Dada  $\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  con  $f_i \in C^1(U)$  se define la *divergencia* de  $\vec{F}$  como

$$\text{div}(\vec{F}) := \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

- Dada  $u \in C^2(U)$  se define el *laplaciano* u *operador de Laplace* de  $u$  como

$$\Delta u := \text{div}(\text{grad}(u)) = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

14. Fórmulas de Green

Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  con frontera  $C^1$

(a) si  $\vec{V} = \vec{V}(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))$ ,  $v_i \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ ,  $1 \leq i \leq n$ , entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V}(x) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{V}(x) \cdot \nu(x) dS_x,$$

donde  $\nu = \nu(x)$  es el vector normal exterior unitario a  $\partial\Omega$ .

(b) si  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x,$$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS_x,$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ .

15. Recordar de Análisis Complejo:

(a) Usando el Teorema de Cauchy calcular

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+iy)^2} dx.$$

(b) Determinar, usando el Teorema de Residuos, el valor de la integral en función del parametro  $a$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx.$$

16. Un resultado de Álgebra para usar mas adelante en la práctica de Ecuación de Laplace:

Sean  $A, B$  matrices simétricas y semidefinidas positivas de  $n \times n$ . Probar que  $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$ .