Análisis Complejo

Práctica N°4.

1. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:
   (a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$,
   (b) $a_n = \frac{n}{2n^2+3}$,
   (c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$,
   (d) $a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$,
   (e) $a_n = \operatorname{sen}(\frac{1}{n^2})$.

2. Demostrar que la serie de término general $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$, $n \geq 2$,
   (a) converge si $q > 0$ y $p > 1$,
   (b) converge si $q > 1$ y $p = 1$,
   (c) diverge si $q > 0$ si $p < 1$,
   (d) diverge si $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

3. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencia:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n$,
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$,
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n^2} z^n$,
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n$,
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}$,
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

4. **Criterio de Weierstrass.** Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Demostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

5. Sean $(a_n)_{n\geq 0}$, $(Z_n)_{n\geq 0}$ sucesiones de números complejos tales que $(a_n Z_n)_{n\geq 0}$ converge. Demostrar que
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) Z_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n (Z_n - Z_{n-1}) \text{ converge.}$$

6. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(z_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de números complejos.
   (a) **Criterio de Dedekind.** Demostrar que si $\lim a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\sum_{n=1}^{k} z_n\right| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.
   (b) **Criterio de Bois-Reymond.** Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

   (Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

7. **Criterio de Dirichlet.** Sea $(r_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tal que $\lim r_n = 0$ y $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesion de números complejos. Demostrar que si las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r_n z_n$ converge. (Sugerencia: usar el criterio de Dedekind.)

8. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n\ z^n$,

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$.

9. Hallar los valores de z para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$,

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$,

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n z^n}$,

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$,

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$,

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$,

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}\right)^n$, $|\alpha| < 1$.

10. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, probar que los conjuntos de convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$ son iguales.

11. Probar que si el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$ es también ρ para todo $k \in \mathbb{N}$.

12. Hallar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

    (a) $e^z \operatorname{sen} z$,

    (b) $\operatorname{sen} z \cos z$,

    (c) $\frac{e^z - 1}{z}$,

    (d) $\frac{e^z - \cos z}{z}$,

    (e) $\frac{1}{\cos z}$,

    (f) $\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$.

13. Para $n \in \mathbb{N}$, hallar el desarrollo en serie de potencias de la funcion $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$. (Sugerencia: $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$.)

14. Sea $f(z) = \sum_n a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$. Se dice que $f(z)$ es *par* (*impar*) si $a_n = 0$ para todo n impar (par). Mostrar que

    - f es par sii $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$,
    - f es impar sii $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$.

15. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

    (a) Probar que $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en un entorno del origen, y la función $R(z)$ es una función racional. Hallar una fórmula explícita para $R(z)$.

    (b) Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de $R(z)$ en serie de potencias.

    (c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

Función logartimo y raíces n-ésimas

16. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama del logaritmo de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

    (a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.

    (b) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω. Demostrar que si Ω es conexo y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$.

    (c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω, entonces $S^1 \not\subseteq \Omega$.

17. Sean $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.

    (a) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$.

    (b) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.

    (c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \to \mathbb{C},\ h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.

    (d) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?

18. Sea log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(t) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-t}{i+t}\right).$$

19. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama de la raíz n-ésima de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, notaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.

    (a) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω. Definirlas.

    (b) Probar que toda rama de $\sqrt{z}$ es holomorfa.

    (c) Si Ω es conexo y f es una rama de $\sqrt{z}$ en Ω, entonces f y $-f$ son todas las ramas.

20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.

    (a) Demostrar que para toda rama g, $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω.

    (b) Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3} g(z)$ para todo z en Ω.

    (c) Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el item (b).