Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo

Práctica N°1.

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$:
   (a) $(i + 1)(i - 1)(i + 3)$
   (b) $(3 - 2i)^2$
   (c) $\frac{1}{-1+3i}$
   (d) $\frac{1+i}{i}$
   (e) $2 + i2 - i$
   (f) $(1 + i)^{100}$
   (g) $(1 + i)^{65} + (1 - i)^{65}$

2. Sean z y w dos números complejos. Demostrar que:
   (a) $\overline{z} = z$ si, y sólo si, $z \in \mathbb{R}$
   (b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
   (c) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$
   (d) $re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
   (e) $im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

3. Probar que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{a}_nX^n + \overline{a}_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0$. Deducir que si $P(X)$ es un polinomio con coeficientes reales y $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(X)$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ también lo es.

4. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $iz^2 + (3 - i)z - (1 + 2i) = 0$.

5. Para $z \in \mathbb{C}$, se define $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Probar que:
   (a) Si $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
   (b) $|zw| = |z|\,|w|$ y si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
   (c) $-|z| \leq re(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq im(z) \leq |z|$
   (d) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2re(z \cdot \overline{w})$ y $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2re(z \cdot \overline{w})$
   (e) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$
   (f) $|z + w| \leq |z| + |w|$ y $|z - w| \geq |z| - |w|$

   Interpretar geométricamente la propiedad (e), también conocida como "Ley del paralelogramo".

6. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica.

7. Sea $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ y $c > 0$. Para $z = x + iy$, transformar la condición $|z - \alpha| = c$ en una ecuación que involucre sólo a x, y, a, b y c; describir qué figura geométrica representa esta ecuación.

8. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:
   (a) $|z - i + 3| = 5$
   (b) $|z - i + 3| \leq 5$
   (c) $re(2z + 3) \geq 0$
   (d) $re((1 + 2i)z) \geq 0$

9. **Definición**: Para $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$, se define $e^z = e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$.
   (a) Demostrar que para todo $z, w \in \mathbb{C}$, $e^{w+z} = e^w e^z$.
   (b) Describir los z tales que $e^z = 1$.
   (c) Demostrar que si $e^z = e^w$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$.
   (d) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

10. (a) Pasar de la forma $a + ib$ a la forma polar:
   i. $1 + i$
   ii. $-5i$
   iii. -3

   (b) Pasar de la forma polar a la forma $a + ib$:
   i. $3e^{i\frac{\pi}{4}}$
   ii. $e^{-i\pi}$
   iii. $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$

11. (a) Para $n = 2, 3, 4, 5$, dibujar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$.
   (b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que hay n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

12. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.
   (a) Hallar la imagen por f del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq im(z) < 2\pi\}$.
   (b) Hallar la imagen por f del primer cuadrante.
   (c) Mostrar que la imagen de la recta $\{t + it \mid t \in \mathbb{R}\}$ es una espiral.

13. (a) Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Mostrar que $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ y $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.
   (b) Generalizando las igualdades del ítem anterior, se define para $z \in \mathbb{C}$,

   $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

   Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$,

   $$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

   (c) Mostrar que $\sin z$ y $\cos z$ tienen período 2π.
   (d) Mostrar que los únicos valores de z para los cuales $\cos z = 0$ y $\sin z = 0$ son los valores reales usuales.
   (e) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\sin(\overline{z}) = \overline{\sin(z)}$

14. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos z \in \mathbb{R}$ y los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\sin z \in \mathbb{R}$.

15. (a) Probar que $\cos z$ y $\sin z$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.
    (b) Hallar todas las soluciones de la ecuación $\cos z = \frac{5}{4}$.

16. Sean $a, b, b' \in \mathbb{R}$. Probar que si $|b| < |b'|$, entonces $|\cos(a + bi)| < |\cos(a + b'i)|$ y $|\sin(a + bi)| < |\sin(a + b'i)|$.

17. Sea $z \neq 1$. Probar que $1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$. Para $0 < \theta < 2\pi$, dar una fórmula para la suma $1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta$.

18. Demostrar que para todo par de números reales positivos a, b, vale que

$$\arctan\left(\frac{1}{a+b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a^2+ab+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

Sucesiones

19. Probar que si $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$. Dar un ejemplo donde no valga la recíproca.

20. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$? Repetir para $|\alpha| > 1$.

21. Si $|\alpha| < 1$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n\big) = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

22. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:
    (a) $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$
    (b) $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$
    (c) $\cos(n\pi) + i\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{n^2}$
    (d) $\left(\frac{(-1)^n+1}{3}\right)^n$
    (e) ni^{2n+1}

23. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto $\mathcal{M}$ de los números complejos c tales que la sucesión definida de manera recursiva del siguiente modo:

$$z_0 = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

resulta acotada. Demostrar que $\mathcal{M} \subset \{|z| \leq 2\}$.

Límite y Continuidad

24. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Probar que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a + ib \iff \Big(\lim_{z\to z_0} \mathrm{Re}(f(z)) = a \text{ y } \lim_{z\to z_0} \mathrm{Im}(f(z)) = b\Big).$$

25. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Probar que f es continua si, y sólo si, las funciones $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ lo son.

26. Probar que $f(z) = e^x y + i\sin(x^2 - 2xy^3)$, con $z = x + iy$, es continua.

27. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua. Probar que $|f|$, $f(\overline{z})$ y $\overline{f(z)}$ son continuas.

28. Cuando sea posible, extender las funciones siguientes a $\mathbb{C}$ de manera que resulten continuas.

    (a) $f(z) = \frac{z-3i}{z^2+9}$

    (b) $f(z) = \frac{z^2+(2-i)z-2i}{z-i}$

    (c) $f(z) = \frac{zRe(z)}{|z|}$

29. Probar que $f : \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(z) = arg(z)$, es continua.

Plano Complejo ampliado - Esfera de Riemann

30. Sean $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $S = S^2$ (la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 1 y centro en $(0,0,0)$). Sea $N = (0,0,1) \in S$, definimos la proyección estereográfica $\theta : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ haciendo $\theta(N) = \infty$ y dado $P \in S \setminus \{N\}$, $\theta(P) = a + ib$ sii $(a, b, 0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$.

    (a) Probar que $\theta(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq N$.

    (b) Probar que θ es una biyección y su inversa φ está dada por
    $$\varphi(z) = \Big(\frac{2re(z)}{1+|z|^2}, \frac{2im(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\Big).$$

    (c) Calcular $\varphi\big(re(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(im(z) = 0\big)$.

31. Sea $\overline{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ, es decir, si z, $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\overline{d}(z, z') = d\big(\varphi(z), \varphi(z')\big)$ donde d es la distancia euclídea.

    (a) Verificar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que, restringida a $\mathbb{C}$, $\overline{d}$ resulta equivalente a la métrica usual (probando, por ejemplo, que $(\mathbb{C}, \overline{d})$ y $(\mathbb{C}, d_{usual})$ tienen las mismas sucesiones convergentes).

    (b) Para $z, w \in \mathbb{C}$, verificar que $\overline{d}(z, w) = \frac{2|w-z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ y $\overline{d}(z, \infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

    (c) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \overline{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

32. Sea C una circunferencia contenida en S y sea π el un único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta y, en caso contrario, una circunferencia.

Homografías

Definición: Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

33. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

34. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

35. (a) Hallar homografías que transformen
    i. los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;
    ii. los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

    (b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primer homografía del ítem anterior es la recta $\{re(z) = 1\}$.

36. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\overline{\alpha} z + 1}$$

transforma a la circunferencia $\{|z| = 1\}$ en si misma y a α en 0 ($|\alpha| \neq 1$).

37. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ no singulares que respresentan las homografías T_1 y T_2 respectivamente.
    (a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?
    (b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?
    (c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?
    (d) ¿Cuándo dos matrices distintas representan la misma homografía?

38. Demostrar que una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si, y sólo si, se puede escribir con coeficientes reales.

39. **Definición**: Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

Observar que (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

    (a) Probar que si $T \in \mathcal{H}$ entonces $\big(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.
    (b) Demostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 están en una recta o circunferencia si, y sólo si, $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

40. **Definición**: Sea C una recta o circunferencia de $\widehat{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos de C. Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto de C sii $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.
    (a) Probar que la definición anterior no depende de los punto elegidos z_2, z_3, z_4 sino de C.
    (b) Probar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tiene un solo punto z^* simétrico respecto de C. A la aplicación que a cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ le asigna su simétrico respecto de C se la llama *simetría respecto de C*. Probar que para cada homografía T que aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en C, la función

$$T \circ \overline{T^{-1}} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

es la simetría respecto de C.

    (c) Probar que si S es una homografía y z, z^* son simétricos respecto de una recta o circunferencia C, entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(C)$.

41. Probar que el simétrico del centro de una circunferencia C (respecto a C) es ∞.

42. Probar que en caso en que C sea una recta, esta nueva noción de simetría coincide con la simetría usual.

43. Dados tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$, demostrar que existe una única recta o circunferencia que pasa por z_1 y hace que z_2 y z_3 sean simétricos.

44. Hallar homografías que transformen

    (a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z+1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i;

    (b) el semiplano superior $im(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $im(\alpha) > 0$).

45. Sea $S(z) = \frac{7z+15}{-2z-4}$. Sea $z_1 = 1$ y $z_n = S(z_{n-1})$ para $n \geq 2$. Hallar $\lim_{n\to\infty} z_n$.