Análisis II - Análisis matemático II - Matemática 3
2do. cuatrimestre de 2013

Práctica 3 - El teorema de Green

1. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro $(0,0)$ y radio R y las siguientes funciones:

   a) $P(x,y) = xy^2$, $Q(x,y) = -yx^2$.

   b) $P(x,y) = 2y$, $Q(x,y) = x$.

2. Verificar el teorema de Green y calcular $\int_C y^2 dx + x dy$, siendo C la curva recorrida en sentido positivo:

   a) Cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$.

   b) Elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

   c) $C = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 : y = x, x \in [0,1]$, y $C_2 : y = x^2, x \in [0,1]$.

3. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

   a) El disco D con centro $(0,0)$ y radio R.

   b) La región dentro de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de cicloide: $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Usando el teorema de Green, calcular el área de D.

5. Hallar el área encerrada por las curvas dadas en coordenadas polares por

$$r(\theta) = 1 + \cos\theta, \quad \text{con } -\pi \le \theta \le \pi,$$

$$r(\theta) = \sqrt{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}, \quad \text{con } -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$

6. Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $n = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D, entonces

$$\int_D u v_x dx dy = -\int_D u_x v dx dy + \int_{\partial D} u v n_1 ds,$$

   para todo par de funciones $u, v \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$.

7. Sean P y Q funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Verificar que el teorema de Green para estas funciones es válido cuando la región D es el anillo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

   Sugerencia: Aplicar el teorema de Green en los discos de radios 1 y 2.

8. Sea C la curva dada por los siguientes trozos

$$\begin{array}{ll} x = 0, & 0 \le y \le 4, \\ y = 4, & 0 \le x \le 4, \\ y = x, & 0 \le x \le 1, \\ y = 2 - x, & 1 \le x \le 2, \\ y = x - 2, & 2 \le x \le 3, \\ y = 4 - x, & 2 \le x \le 3, \\ y = x, & 2 \le x \le 4, \end{array}$$

orientada positivamente. Calcular

$$\int_C \frac{y}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}dy.$$

9. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$. Calcular

$$\int_{\partial D} x^2 y dx - xy^2 dy.$$

10. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y) = (y+3x, 2y-x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse de ecuación $4x^2+y^2 = 4$ en el sentido de las agujas del reloj.

11. Sea $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$. Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot ds$ donde C es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular $Q_x - P_y$. ¿Se satisface en este caso el teorema de Green?

12. Sea C la curva dada por

$$C: \begin{cases} y = x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ y = 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

recorrida del $(-1,0)$ al $(1,0)$. Calcular $\int_C f_1 dx + f_2 dy$, siendo

$$f_1 = \frac{x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(x^2+y^2)} - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_2 = \frac{y \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(x^2+y^2)} + x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

13. Hallar todas las circunferencias planas C tales que

$$\int_C -y^2\, dx + 3x\, dy = 6\pi.$$

14. Calcular la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot ds$ donde $\mathbf{F}(x,y) = (y^2 e^x + \cos x + (x-y)^2, 2ye^x + \operatorname{sen} y)$, y C es la curva dada por $x^2+y^2 = 1$, $y \geq 0$, orientada de manera tal que comience en $(1,0)$ y termine en $(-1,0)$.

15. Sean $u, v \in C^1(D)$ donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^4}{4} \leq 1\}$. Consideremos los campos definidos por $\mathbf{F}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, $\mathbf{G}(x,y) = (v_x - v_y, u_x - u_y)$. Calcular

$$\iint_D (\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(x,y)\, dxdy,$$

sabiendo que sobre el borde de D se tiene $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = 1$.