Análisis II - Análisis matemático II - Matemática 3
2do. cuatrimestre de 2013

Práctica 2 - Integrales de superficie

Superficies

1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar.

   a) $r = k, \quad k$ constante.

   b) $\varphi = k, \quad k \in (0, \pi/2]$ constante.

   En cada uno de los casos anteriores, dé un vector normal en cada punto.

2. *a*) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos. Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dadas por

   $$\Phi_1(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right),$$
   $$\Phi_2(u, v) = (au\ \cos(v), bu\ \sin(v), u^2),$$

   son dos parametrizaciones del *paraboloide elíptico*

   $$PE = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right\}.$$

   b) Sean $0 < b < a$. Mostrar que $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

   $$\Phi(u, v) = \big((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u)\big)$$

   es una parametrización del *toro*

   $$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(a - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = b^2\right\}.$$

3. Sea C una curva en el plano xz parametrizada por $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (x(t), 0, z(t))$, donde $x(t) > 0$ para todo t. Utilice una variable angular y describa la superficie de revolución (alrededor del eje z) generada por esta curva. Si la parametrización de la curva C era regular, la parametrización de la superficie ¿también es regular?

4. Utilice la idea del ejercicio anterior para parametrizar un cono, un paraboloide, un toro, una esfera y un hiperboloide.

5. Considerar la superficie dada por la parametrización

   $$x = u\cos(v) \qquad y = u\,\text{sen}(v) \qquad z = u.$$

   ¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

6. Sea C la curva en el plano xy dada en coordenadas polares por

   $$r = 2 - \cos\theta, \qquad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

   Sea S la superficie que se obtiene por revolución de esta curva alrededor del eje y.

a) Dar una parametrización de S.

b) ¿Es suave esta superficie?

7. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen, en un punto genérico de la esfera (x_0, y_0, z_0).

8. Si la superficie S es el gráfico de una función diferenciable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, demostrar que S es una superficie suave.

9. Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto (0,1,1) a la superficie dada por la parametrización
$$x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2.$$

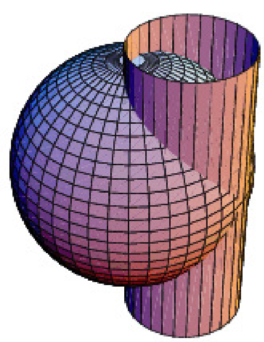
10. Encontrar una fórmula para el plano tangente a la superficie de ecuación $x = h(y, z)$ (donde h es una funcion C^1) en un punto $(h(y_0, z_0), y_0, z_0)$.

Áreas e integrales de campos escalares

11. Sea S la superficie parametrizada por $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,
$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\,\text{sen}(\theta) \qquad z = \theta.$$
Graficar, hallar un vector normal en cada punto y calcular su área.

12. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ el disco unitario centrado en el origen. Sea S la superficie parametrizada por la función $\phi(u, v) : D \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv).$$
Calcular su área.

13. Calcular el área de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$. Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.



La bóveda de Viviani

14. Sea $\alpha > 0$ y sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Sea S la superficie obtenida por revolución de la curva $z = f(x)$ alrededor del eje z. Mostrar que el área de S es
$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$
Aplicar a la superficie dada en el ejercicio 2 item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$ y $a = b = 1$.

15. Sea C la curva parametrizada por $\sigma(\theta) = (\cos^3\theta, \operatorname{sen}^3\theta, 0)$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y consideremos S la superficie que se obtiene al girar la curva C alrededor del eje x.

   a) Hallar una parametrización de S.

   b) Hallar el área de S.

16. Calcular $\iint_S xy\, dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

17. Calcular $\iint_S (x + y + z) dS$ donde S la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, es decir

$$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

18. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x, y, z) y el punto $(0, 0, r)$.

19. Considerar el hemisferio superior de una esfera de radio R.

   a) Si esta semiesfera tuviera densidad constante, ¿cuál sería la coordenada z de su centro de masa?

   b) Si suponemos que está inmersa en un ambiente cuya temperatura varía linealmente con la altura, es decir, $T(x, y, z) = T_0 - kz$ (donde T_0 y k son constantes), hallar la temperatura media de la semiesfera.

Integrales de campos vectoriales: flujos

20. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie que bordea al cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

21. Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea (0,0,1).

22. Sea S la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial, y sea F_r su componente radial. Probar que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta.$$

23. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

24. Supongamos que $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$ representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

25. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo independiente de z, es decir, $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), F_3(x, y))$, y considere una superficie *cilíndrica vertical*, esto es: $S = C \times [z_0, z_1]$ donde $z_0 < z_1$ y $C \subseteq \mathbb{R}^2$ es una curva abierta regular. Exprese el cálculo de flujo de $\mathbf{F}$ a través de S en términos de una integral curvilínea sobre C.