

Práctica 9: Cambio de variables y aplicaciones

---

- (Coordenadas polares) Dada  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sean  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  y  $g(r, \theta) = f(x, y)$ . Calcular  $\frac{\partial g}{\partial r}$  y  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre  $f$ .
- Sean  $D^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  y  $T$  la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir,  
 $T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .
  - Mostrar que  $T(D^*) = D$ . ¿Es biyectiva  $T$ ?
  - ¿En que transforma  $T$  el rectángulo  $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta \theta]$ ?
  - Calcular la matriz  $DT(r, \theta)$ . ¿En que transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso  $r = 0$ ?
  - Relacionar con la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujos correspondientes).
- Sean  $D_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 4\pi\}$  y  $T$  la transformación del ejercicio anterior.
  - Hallar  $D = T(D_1)$ .
  - Calcular  $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$  y  $\int_{D_1} r^2 J dr d\theta$  siendo  $J$  el jacobiano de la transformación. ¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?
- Calcular el área de un círculo de radio  $r$  y el área de una elipse con semiejes de longitud  $a$  y  $b$ .
- Sea  $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (4u, 2u + 3v)$ . Sea  $D^*$  el rectángulo  $[0, 1] \times [1, 2]$ . Hallar  $D = T(D^*)$  y calcular:
    - $\int_D xy dx dy$  y  $\int_D (x - y) dx dy$haciendo un cambio de variables para transformarlas en integrales sobre  $D^*$ .
  - Repetir el ítem anterior para  $T(u, v) = (u, v(1 + u))$ .
- Sean  $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$  y  $D^* = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$ . Hallar  $D = T(D^*)$  y calcular su área.

7. Sean  $T(u, v)$  y  $D$  los del ejercicio anterior. Calcular:

$$\int_D \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

haciendo ese cambio de variables.

8. Calcular  $\int_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$  donde  $D$  es el disco de centro en el origen y radio 2.

9. Hallar el área dentro de la curva  $r = 1 + \sin \theta$ .

10. Dado el paralelogramo  $P$  del plano  $xy$  con vértices  $(0,0)$ ,  $(2,10)$ ,  $(3,17)$  y  $(1,7)$ ,

(a) Hallar una transformación lineal que convierta a  $P$  en un rectángulo  $R$  del plano  $uv$  con vértices opuestos en  $(0,0)$  y  $(4,2)$ .

(b) Calcular la integral  $\int_P xy dx dy$  transformándola en una integral sobre el rectángulo  $R$ .

11. Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función  $e^{-x^2}$  no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales. Esto dificulta el cálculo de  $\int_a^b e^{-x^2} dx$ . Sin embargo, el siguiente truco notable permite calcular de manera simple la integral impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

(a) Observar que  $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

(b) Calcular la integral de (a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.

12. Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Esta curva se llama lemniscata. ¿Por qué?

13. Calcular  $\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$ , donde  $A$  está determinado por las condiciones  $x^2 + y^2 \leq 1$  y  $x + y \geq 1$ .

14. (a) (Coordenadas esféricas) Dada  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , sean  $x = r \cos(\theta) \sin(\phi)$ ,  $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$ ,  $z = r \cos(\phi)$  y sea

$$g(r, \theta, \phi) = f(x, y, z)$$

Calcular  $\frac{\partial g}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  y  $\frac{\partial g}{\partial \phi}$  imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre  $f$ .

(b) (Coordenadas cilíndricas) Dada  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , sean  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  y  $g(r, \theta, z) = f(x, y, z)$ .

Calcular  $\frac{\partial g}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  y  $\frac{\partial g}{\partial z}$  imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre  $f$ .

15. Integrar  $ze^{x^2+y^2}$  sobre el cilindro dado por  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $2 \leq z \leq 4$ .

16. Calcular el volumen de un cilindro con base circular de radio  $r$  y altura  $h$ .

17. (a) Calcular el volumen  $V(R)$  de una esfera  $B_R$  de radio  $R$ .

(b) Llamando  $\partial B_R$  a la superficie del borde de la esfera  $B_R$  y  $A(\partial B_R)$  a su área, demostrar que  $\frac{dV(R)}{dR} = A(\partial B_R)$  y deducir el valor del área de dicha superficie.

18. Integrar  $x^2 + y^2 + z^2$  sobre el cilindro dado por  $x^2 + y^2 \leq 2$ ,  $-2 \leq z \leq 3$ .

19. Sea  $B$  la bola unitaria, es decir,  $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ . Calcular:

$$\int_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

20. Calcular:

$$\int_S \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde  $S$  es el sólido acotado por dos esferas de radios  $a$  y  $b$  con  $0 < b < a$  y centradas en el origen.

21. Calcular  $\int_B z dx dy dz$  donde  $B$  es la región sobre el plano  $xy$  dentro del cilindro dado por  $x^2 + y^2 \leq 1$  y debajo del cono dado por  $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

22. Sea  $E$  el elipsoide dado por  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$ .

(a) Hallar el volumen de  $E$ .

(b) Calcular  $\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)] dx dy dz$ .

23. Si un sólido  $W$  tiene densidad  $\rho$ , su masa está dada por

$$\int_W \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 2x$  y el cono  $z^2 = x^2 + y^2$  si la densidad es  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

24. Sea  $\rho$  la densidad de un sólido  $W$ . Se definen los primeros momentos de  $W$  respecto de los planos coordenados  $M_{yz}$ ,  $M_{xz}$ ,  $M_{xy}$ , como

$$\int_W x\rho(x, y, z) dx dy dz, \int_W y\rho(x, y, z) dx dy dz, \int_W z\rho(x, y, z) dx dy dz,$$

respectivamente y su centro de masa como

$$\left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right),$$

donde  $M$  es la masa de  $W$ . Hallar el centro de masa del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $1 \leq z \leq 2$ , si la densidad es  $\rho = (x^2 + y^2)z^2$ .

25. Si un sólido  $W$  tiene densidad uniforme  $\rho$ , el *momento de inercia* alrededor del eje  $x$  está definido por,

$$I_x = \int_W \rho(y^2 + z^2) dx dy dz$$

y análogamente se definen  $I_y$  e  $I_z$ . Sea ahora  $W$  el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano  $z = a$  y por debajo por el cono descrito en coordenadas esféricas por  $\phi = k$ , donde  $k$  es una constante tal que  $0 < k < \pi/2$ . Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje  $z$ .

26. Hallar el momento de inercia alrededor del eje  $y$  para la bola  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  si la densidad de masa es una constante  $\rho$ .
27. Dado un sólido  $W$  con densidad de masa  $\rho(x, y, z)$ , la fuerza gravitacional  $\mathbf{F}$  que ejerce  $W$  sobre una masa  $m$  en  $(x_1, y_1, z_1)$  está dada por el gradiente de una función  $V$  llamada *potencial gravitacional*, es decir,  $\mathbf{F} = -\nabla V$ . Este *potencial gravitacional* está dado por,

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \int_W \frac{\rho(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal.

- (a) Hallar el potencial gravitacional sobre una masa  $m$  de un planeta esférico con una masa  $M = 3 \cdot 10^{26}$  kg, a una distancia de  $2 \cdot 10^8$  m de su centro.
- (b) Hallar la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto de 70 kg en la posición indicada en a).