Final de

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Fechas de examen de diciembre 2013 y febrero/marzo 2014

Se espera que los alumnos sepan y entiendan **todos** los enunciados de los temas vistos en las clases teóricas. El examen final podrá contener ejercicios teórico–prácticos sobre todos los temas. Por otro lado, se podrá pedir que escriban las demostraciones de los teoremas y resultados que se listan a continuación.

1. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en $P \in \mathbb{R}^2$ si y solo si para toda sucesión $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = P$, se verifica $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) = f(P)$.
2. Teorema de Bolzano: Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con f(a) y f(b) de signos distintos, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
3. Teorema de valores intermedios en conjuntos arcoconexos de $\mathbb{R}^2$: Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ arcoconexo y $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(P) < d < f(Q)$ con $P, Q \in A$ y $d \in \mathbb{R}$, entonces existe $R \in A$ tal que $f(R) = d$.
4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es continua en P.
5. Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy en una variable.
6. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en el abierto U. Probar que f es diferenciable en U.
7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$. Probar que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ y es igual a $\nabla f(P) \cdot v$
8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(P) \neq 0$. Probar que la dirección de máximo crecimiento de f está dada por $\nabla f(P)$.
9. Teorema del valor medio para funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$: Sean $B \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y convexo y $f : B \to \mathbb{R}$ diferenciable en B. Entonces para todo $P, Q \in B$, existe R en el segmento que une P con Q tal que $f(P) - f(Q) = \nabla f(R) \cdot (P - Q)$.
10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y P un extremo de f. Probar que $\nabla f(P) = 0$.
11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^3$ y P un punto crítico de f. Probar que si el hessiano de f en P es definido positivo, entonces P es un mínimo relativo estricto de f.
12. Teorema de multiplicadores de Lagrange: Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ y $P \in S$. Probar para $n = 2$ o $n = 3$ que si P es un extremo local de f restringido a S y $\nabla g(P) \neq 0$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.
13. Dado P en una curva de nivel de $F(x, y)$ de clase C^1 tal que $\nabla F(P) \neq 0$, entonces $\nabla F(P)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva en P.
14. Teorema fundamental del cálculo: Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.
15. Regla de Barrow: sea f continua en $[a, b]$, y F una primitiva, es decir $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, F es derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
16. Teorema del valor medio integral: Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(t)dt = f(c).(b - a)$.