

ALGEBRA LINEAL - Práctica N°2 - Segundo cuatrimestre de 2013**Matrices y coordenadas****Ejercicio 1.**

- i) Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n \times n}$ y calcular su dimensión.
- $S_1 = \{A \in K^{n \times n} / A = A^t\}$ (matrices simétricas)
 - $S_2 = \{A \in K^{n \times n} / A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)
 - $S_3 = \{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)
 - $S_4 = \{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)
 - $S_5 = \{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = \dots = A_{nn}\}$ (matrices escalares)
- Probar que $S_1 \oplus S_2 = K^{n \times n}$ si $2 \neq 0$ en K .

Ejercicio 2. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

Sean $A, A' \in K^{n \times n}$; $B, B' \in K^{n \times m}$; $C, C' \in K^{m \times n}$ y $D, D' \in K^{m \times m}$.

Sean $M, M' \in K^{(n+m) \times (n+m)}$ definidas por $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.

Entonces $M.M' = \begin{pmatrix} A.A' + B.C' & A.B' + B.D' \\ C.A' + D.C' & C.B' + D.D' \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.

- Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, el producto de matrices en $K^{n \times n}$ no es conmutativo.
- Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{n \times n} / A.B = B.A \ \forall B \in K^{n \times n}\}$.
- Sea $A \in K^{n \times n}$. Probar que el conjunto S de todas las matrices que conmutan con A es un subespacio de $K^{n \times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \ \forall j \in \mathbb{N}$.
- Sea $A \in K^{n \times n}$ con $n \geq 2$. Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n-1}\}$ es linealmente dependiente.
- Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n \times n}$ para que
 - $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 - $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$

Ejercicio 4. Sean A, B y $C \in K^{n \times n}$ ($n \geq 2$). Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:

- $A.B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0$
- $A.B = A.C$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$
- $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$
- $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$
- $A^2 = A \Rightarrow A = 0 \text{ ó } A = I_n$

Ejercicio 5. Sea $A \in K^{n \times n}$. Probar que el conjunto $T = \{B \in K^{n \times n} / A.B = 0\}$ es un subespacio de $K^{n \times n}$. Si $S \subset K^n$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A , probar que $\dim T = n \cdot \dim S$.

Ejercicio 6. Sean $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times r}$, $D, D' \in K^{n \times n}$. Probar:

- i) $(A.B)^t = B^t.A^t$
- ii) $tr(D.D') = tr(D'.D)$

Ejercicio 7. Sean A y $B \in K^{n \times n}$.

- i) Probar que si A y B son triangulares superiores, $A.B$ es triangular superior.
- ii) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

Ejercicio 8. Sea $A \in K^{n \times n}$.

- i) Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A.A^t \neq A^t.A$.
- ii) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?
- iii) Si $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A.A^t = 0 \iff tr(A.A^t) = 0$.

Ejercicio 9. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- i) $A, B \in GL(n, K) \Rightarrow A + B \in GL(n, K)$
- ii) $A \in GL(n, K) \iff A^t \in GL(n, K)$
- iii) $tr(A) = 0 \Rightarrow A \notin GL(n, K)$
- iv) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$) $\Rightarrow A \notin GL(n, K)$

Ejercicio 10. Sea $A \in K^{m \times n}$ y sea $b \in K^m$. Sea $H = \{x \in K^n / A.x = b\}$. Probar:

- i) Si $C \in GL(m, K)$, entonces $H = \{x \in K^n / (C.A).x = C.b\}$.
- ii) Si $m = n$ y $A \in GL(n, K)$, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es? (Notar que esto significa que si A es inversible, cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única).

Ejercicio 11. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

$$\begin{array}{lll}
 \text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{ii) } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{iii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
 \text{iv) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{v) } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} &
 \end{array}$$

Ejercicio 12. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 14. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$
- ii) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$
- iii) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 15. Calcular $C(B, B')$ en los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$
- ii) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3, 1 + X, X^2\}$, $B' = \{1, X + 3, X^2 + X\}$
- iii) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$

Ejercicio 16. Dado $v \in V$ y las bases B y B' , hallar las coordenadas de v respecto de B y, utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B' .

- i) $v = (-1, 5, 6)$ y B, B' como en el Ejercicio 14. i)
- ii) $v = 3 + X^2$ y B, B' como en el Ejercicio 14. ii)

Ejercicio 17. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3 , hallar:

- i) una base B_1 de K^3 tal que $M = C(B_1, B)$.
- ii) una base B_2 de K^3 tal que $M = C(B, B_2)$.