Práctica 4

1. (a) Sea p un primo y sea t trascendente sobre $\mathbb{F}_p$. Probar que $X^p - t$ es irreducible en $\mathbb{F}_p(t)[X]$.
   (b) Sea K un cuerpo de característica $p > 0$. Si $a \in K - K^p$ y $n \in \mathbb{N}_0$, probar que $X^{p^n} - a$ es irreducible en $K[X]$.

2. Sea p un primo, $p \neq 2$. Sea $K = \mathbb{F}_p(u, v)$ con u, v algebraicamente independientes sobre $\mathbb{F}_p$ y sea α una raíz de $f = X^{2p} - uv\, X^p + v$ en una clausura algebraica de K. Probar que $K(\alpha)/K$ no es separable ni puramente inseparable.

3. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean $E_s = \{x \in E : x \text{ es separable sobre } K\}$ y $E_i = \left\{x \in E : x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \geq 0\right\}$. Probar que:
   (a) E_s y E_i son subcuerpos de E.
   (b) E es puramente inseparable sobre E_s.
   (c) $E_s \cap E_i = K$.
   (d) Si E/k es normal, entonces E es separable sobre E_i y $E = E_s E_i$.

4. Sea p un primo y sean u, v algebraicamente independientes sobre $\mathbb{F}_p$. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las siguientes extensiones:
   (a) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$.
   (b) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.

5. Sea K un cuerpo de caracterísitca $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sea α tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \geq 0$. Probar que $\boldsymbol{m}(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$ con $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha^{p^j} \in K\}$.

6. Sean p un primo y $K = \mathbb{F}_p(t)$ con t trascendente sobre $\mathbb{F}_p$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea α una raíz de $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$ en una clausura algebraica de K. Sea $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid r\}$. Probar que $[K(\alpha) : K]_i = p^m$.

7. Sean p un primo, $p \neq 2$, y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$ con t trascendente sobre $\mathbb{F}_p$. Sea C/K una clausura algebraica y sea $\alpha \in C$ una raiz de $X^{p^3} - tX^p + t \in K[X]$. Sea L la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$. Hallar $[L : K]$.

8. (a) Probar que todo cuerpo de característica cero es perfecto.
   (b) Sea K un cuerpo de característica $p > 0$. Probar que K es perfecto si y sólo si el morfismo $f : K \to K$ definido por $f(x) = x^p$ es un automorfismo.
   (c) Probar que todo cuerpo finito es perfecto.

9. Probar que si K es un cuerpo de característica $p > 0$, entonces $K(X)$ no es perfecto.