Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2013
Práctica 7

En esta práctica, un A-módulo será un A-módulo a izquierda.

1. Determine si M es un A-módulo en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = \mathbb{Z}_n$, $M = \mathbb{Z}_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, con la suma usual de $\mathbb{Z}_m$ y la acción
   $$a \cdot x = r_m(ax).$$

   b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_2(\mathbb{C})$, con la suma usual de matrices y la acción
   $$a \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot z_{11} & a \cdot z_{12} \\ a \cdot z_{21} & a \cdot z_{22} \end{pmatrix}.$$

   c) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, con la suma usual de $\mathbb{R}^n$ y la acción
   $$f \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (f(1).x_1, f(0).x_2, \dots, f(0).x_n).$$

   d) $A = M_n(\mathbb{Z})$, $M = \mathbb{Z}$, con la suma usual de $\mathbb{Z}$ y la acción
   $$a \cdot m = det(a) \cdot m.$$

2. Sean A y B anillos, M un B-módulo y $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Pruebe que la acción $a \cdot_\varphi x = \varphi(a) \cdot x$ define una estructura de A-módulo sobre M.

3. Determine si S es un submódulo del A-módulo M en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = \mathbb{Q}$, $M = M_n(\mathbb{Q})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}) : a_{ii} = 0 \;\forall\, 1 \leq i \leq n\}$.

   b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}) : det(a_{ij}) = 0\}$

   c) A un anillo cualquiera , $M = A^n$, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

   d) A un anillo cualquiera , $M = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f = 0 \text{ ó } gr(f) \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Sean A un anillo conmutativo, $a \in A^{n\times m}$ y $f_a : A^{m\times 1} \to A^{n\times 1}$ la aplicación definida por $f_a(x) = a \cdot x$, donde $\cdot$ es el producto de matrices. Pruebe que es un morfismo de A-módulos.

5. Sean A un anillo conmutativo y M un A-módulo. En cada uno de los siguientes casos, pruebe que f es un morfismo de A-módulos, determine su núcleo, su imagen y si es inyectivo, sobreyectivo o isomorfismo:

a) $f : M^n \longrightarrow M^2$, $f(x) = (x_1 + x_n, x_n)$ $(n > 2)$.

b) $f : M^n \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n)$.

c) Si $n \leq m$, $f : M^n \longrightarrow M^m$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots 0)$.

d) Si $n \leq m$, $f : M^m \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$.

e) Fijo $a \in A$, $f : A[X] \longrightarrow A$, $f(p) = p(a)$.

f) $f : M_n(A) \longrightarrow A^n$, $f(a) = (a_{11}, \dots, a_{nn})$ si $a = (a_{ij})$.

g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$.

6. Si M y N son conjuntos y $f : M \longrightarrow N$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in M\}$$

se llama el *gráfico* de f. Pruebe que si M y N son A-módulos entonces f es un morfismo de A-módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \oplus N$.

7. Sean A un anillo y M un A-módulo. Caracterice el módulo cociente N/S en cada uno de los siguientes casos:

a) $N = M^n$, $S = \{x \in N : x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

b) $N = M^n$ $(n > 2)$, $S = \{x \in N : x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$.

c) $N = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f(1) = 0\}$.

d) $N = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij} \in M_n(A) : a_{ii} = 0 \; \forall \, 1 \leq i \leq n\}$.

e) $N = M^J$, $S = \{x \in N : x_i = 0 \; \forall \, i \in I\}$, donde I es un subconjunto fijo de J.

8. Sean V y W dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación. Pruebe que f es una transformación lineal de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales si, y sólo si, $f : (V, +) \longrightarrow (W, +)$ es un morfismo de grupos.

9. Sea A un anillo y sean M y N dos A-módulos. Pruebe que

a) $Hom_A(M, N)$ con la suma definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es un grupo abeliano.

b) Si A es conmutativo, la acción $(a.f)(x) = a.f(x)$ define sobre el grupo abeliano $Hom_A(M, N)$ una estructura de A-módulo. Para A no necesariamente conmutativo, esta acción define sobre $Hom_A(M, N)$ una estructura de $\mathcal{Z}(A)$-módulo.

10. Sea A un anillo conmutativo. Dado un A-módulo M se llama *dual* de M al A-módulo $M^* = Hom_A(M, A)$. Pruebe que la aplicación $\psi : M \longrightarrow M^{**}$ definida por $\psi(x)(f) = f(x)$ es un morfismo de A-módulos y que $\ker(\psi) = \bigcap\limits_{f \in M^*} \ker(f)$.

11. Sea M un A-módulo. Pruebe que $Hom_A(A, M) \simeq M$ como $\mathcal{Z}(A)$-módulos.

12. Pruebe que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.

13. Pruebe que un A-módulo M es simple si, y sólo si, $M \neq \{0\}$ y $A.x = M$ $\forall\, x \in M$ tal que $x \neq 0$.

14. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos. Pruebe que:

    a) Si M es simple entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.

    b) Si N es simple entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.

    c) Si M y N son simples entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo.

15. Sea M un A-módulo simple. Pruebe que el anillo $End_A(M)$ es un anillo de división.

16. Pruebe que los grupos abelianos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{Q}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$ no son finitamente generados

17. Pruebe que todo módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.

18. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in M_n(A)$. Sea $v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in A^n$. Pruebe que

    a) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $det(A) \neq 0$.

    b) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de A^n si y sólo si $\det(A) \in \mathcal{U}(A)$.

19. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Pruebe que si todo conjunto no vacío de submódulos finitamente generados de M tiene un elemento maximal entonces M es Noetheriano

20. Sea A un anillo e I un ideal bilátero. Pruebe que si A es un anillo Noetheriano entonces A/I también lo es.

21. Dé un ejemplo de

    a) Un A-módulo finitamente generado que no sea Noetheriano.

    b) Un A-módulo tal que todo submódulo propio sea finitamente generado y que no sea Noetheriano.

22. Pruebe que

    a) Un K-espacio vectorial V es Noetheriano si y sólo si $dim_K(V) < \infty$.

    b) Todo anillo principal a izquierda es Noetheriano a izquierda.

    c) $\mathbb{Z}$ y $K[X]$ (con K cuerpo) son anillos Noetherianos.

23. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Sea $f \in End_A(M)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = Ker(f^n)$, $I_n = Im(f^n)$. Pruebe que

    a) $K_1 = K_2 \Rightarrow K_1 \cap I_1 = 0$.

    b) $I_1 = I_2 \Rightarrow K_1 + I_1 = M$.

    c) Si M es Noetheriano entonces $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap I_n = 0$.

    d) Si M es Noetheriano y f es un epimorfismo entonces f es un automorfismo.

24. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Pruebe que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ es Noetheriano.

25. Sean $S \subset A$ un sistema multiplicativo y M un A-módulo finitamente generado. Pruebe que $S^{-1}M = 0$ si y sólo si $\exists\, s \in S$ tal que $sM = 0$.

26. Sean $S \subset A$ un sistema multiplicativo, M un A-módulo, N un $S^{-1}A$-módulo, y $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Pruebe que existe un único morfismo de $S^{-1}A$-módulos $\bar{f} : S^{-1}M \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \\ S^{-1}M \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

27. *a*) Sean $S \subset A$ un sistema multiplicativo, M un A-módulo y N un submódulo de M. Pruebe que la aplicación $S^{-1}N \to S^{-1}M$ inducida por la inclusión $N \subset M$ es inyectiva. (Esto permite pensar a $S^{-1}N$ como un $S^{-1}A$-submódulo de $S^{-1}M$.)

    b) Sean M un A-modulo y $N_1, N_2 \subset M$ submódulos. Pruebe que

    1) $S^{-1}(N_1 + N_2) = S^{-1}N_1 + S^{-1}N_2$.
    2) $S^{-1}(N_1 \cap N_2) = S^{-1}N_1 \cap S^{-1}N_2$.