Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2013
Práctica 2

1. Sea G un grupo y H, K subgrupos de G.

   a) ¿Será cierto que si H y K son subgrupos de G entonces HK es subgrupo de G?

   b) Pruebe que si H ó K es normal, entonces HK es un subgrupo.

   c) Pruebe qye si H y K son normales, entonces HK es un subgrupo normal.

2. Determine cuáles de los siguientes subgrupos son normales

   a) $G = \mathbb{D}_4$, $H = \{1, r, r^2, r^3\}$.

   b) $G = GL_n(\mathbb{C})$, $H = \mathcal{H}$.

   c) $G = GL_n(\mathbb{R})$, $H = SL_n(\mathbb{R})$.

3. Sea G es un grupo abeliano. Pruebe que todo subgrupo es normal. Pruebe que el grupo $\mathcal{H}$ es un contraejemplo para la recíproca de esta afirmación.

4. Dados los siguientes subgrupos de $\mathbb{S}_4$:

$$H = \{id,\ (1\ 2)(3\ 4)\} \quad K = \{id,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}$$
$$U = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$$

   a) Pruebe que $H \triangleleft K$, $K \triangleleft \mathbb{A}_4$ y $K \triangleleft \mathbb{S}_4$.

   b) Pruebe que H no es normal en $\mathbb{A}_4$ ni en $\mathbb{S}_4$.

   c) Determine si $U \triangleleft \mathbb{S}_4$.

5. Encuentre todos los subgrupos normales de G.

   a) $G = \mathbb{D}_n$, donde n es impar.

   b) $G = \mathbb{D}_n$, donde n es par.

6. Sean G y G' grupos y sea $f : G \to G'$ un morfismo. Pruebe que

   a) $\ker(f) \triangleleft G$. ¿Es cierto que $\operatorname{im}(f) \triangleleft G'$?

   b) Si H es un subgrupo normal de G, existe un grupo G' y un epimorfismo $f : G \longrightarrow G'$ tal que $\ker(f) = H$.

7. Sea G un grupo y H un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Pruebe que $H \triangleleft G$.

8. Encuentre un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determine $|G : S|$

a) $G = \mathbb{R}, \quad S = \mathbb{Z}$
b) $G = \mathbb{D}_n, \quad S = \langle r \rangle$
c) $G = GL_n(K), \quad S = SL_n(K),$ donde K es un cuerpo.
d) $G = \mathbb{C}^\times, \quad S = S^1$

9. Calcule todos los cocientes de $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{D}_4$ y $\mathcal{H}$.

10. Calcule todos los cocientes de $\mathbb{D}_n$.

11. Pruebe que

    a) $\dfrac{\mathbb{C}^\times}{\mathbb{R}_{>0}} \simeq S^1$
    b) $\dfrac{\mathbb{Z}^\times}{m\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_m$
    c) $\dfrac{\mathbb{Q}^\times}{\mathbb{Q}_{>0}} \simeq G_2$
    d) $\dfrac{S^1}{G_n} \simeq S^1$
    e) $\dfrac{G_n}{G_m} \simeq G_{\frac{n}{m}}$ para $m \mid n$

12. Verifique que $H \lhd G$ y calcular G/H

    a) $G = \mathbb{S}_4, \quad H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
    b) $G = \mathbb{D}_6, \quad H = \{1, r^3\}$.

13. *a*) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un epimorfismo y sea $H \lhd G$. Si $H' = f(H)$, demuestre que

        I) $H' \lhd G'$
        II) Si f es un isomorfismo, $G/H \simeq G'/H'$

    b) ¿Qué pasa con G/H y G'/H' si $G \simeq G'$, $H \simeq H'$, $H \lhd G$ y $H' \lhd G'$?

14. Sea G un grupo y sean H, K subgrupos normales de G. Sean π_H y π_K las proyecciones de G en H y K respectivamente. Demuestre que la aplicación

    $$f : G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$$

    definida por $f(\overline{x}) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$ es un monomorfismo.

15. Sea G un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.

    a) Pruebe que I_a es un automorfismo de G (se denomina automorfismo interior de G).
    b) Pruebe que la aplicación $I : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$, definida por $I(a) = I_a$, es un morfismo de grupos y verificar que

    $$\ker(I) = \{a \in G : ag = ga, \forall g \in G\}.$$

    Este subgrupo se llama el *centro de* G y lo notamos $\mathcal{Z}(G)$.

  c) Pruebe que $\mathrm{im}(I)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$. A este grupo lo notaremos $\mathrm{Int}(G)$.

  d) Pruebe que $G/\mathcal{Z}(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$.

16. Determine $\mathcal{Z}(G)$ (el centro de G) en cada uno de los siguientes casos:

  a) $G = \mathbb{D}_n$

  b) $G = \mathbb{S}_4$

  c) $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) : \ a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$

  d) $G = \mathcal{H}$

  e) $GL_n(\mathbb{R})$

  f) $SL_n(\mathbb{R})$

17. Sea G un grupo. Se define $[G, G]$, el *conmutador de G*, como el subgrupo de G generado por todos los elementos de la forma $[x, y] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.

  a) Pruebe que $[G, G]$ es un subgrupo normal de G.

  b) Pruebe que $G/[G, G]$ es un grupo abeliano.

  c) Sea $f : G \to K$ un morfismo donde K es un grupo abeliano. Pruebe que f se factoriza unívocamente por $G/[G, G]$, esto es, existe un único morfismo $\overline{f} : G/[G, G] \to K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & K \\ G/[G,G] \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

  em Sea $H \subset G$ un subgrupo. Pruebe que

$$[G, G] \subseteq H \Leftrightarrow H \triangleleft G \text{ y } G/H \text{ es abeliano.}$$

18. Determine $[G, G]$ en cada uno de los siguientes casos

  a) $G = \mathbb{D}_n$

  b) $G = \mathcal{H}$

  c) $G = \mathbb{S}_4$

  d) $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) : \ a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$

19. Pruebe que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y $\mathbb{D}_4$.

20. Sea p un primo mayor o igual que 3. Demuestre que si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq \mathbb{D}_p$.

21. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

a) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset \mathcal{Z}(G)$.

b) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un elemento de orden k.

c) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un subgrupo de orden k.

d) Si $\forall x \in G$, se tiene que $ord(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.

e) Si $p/|G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.

f) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.