
ÁLGEBRA II

Segundo Cuatrimestre — 2013

Práctica 1

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $G_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.
 - a) Pruebe que (G_n, \cdot) es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in G_n$.
 - b) Pruebe que G_n es cíclico, es decir, que existe $w \in G_n$ que satisface:
 $\forall z \in G_n \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w^k$.
2. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
 - a) Pruebe que (S^1, \cdot) es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.
 - b) Determine si S^1 es cíclico.
3. En cada uno de los siguientes casos determine si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, determine si es abeliano:
 - a) $G = \mathbb{Q}_{>0}$ $a * b = a \cdot b$.
 - b) $G = M_3(\mathbb{Z})$ $a * b = a \cdot b$.
 - c) $G = M_n(\mathbb{R})$ $a * b = a + b$.
 - d) $G = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det a = 1\}$ $a * b = a \cdot b$.
 - e) $G = \text{End}_K(V)$, con V un K -espacio vectorial $f * g = f \circ g$.
 - f) $G = \{f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \mid d(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$
 $f * g = f \circ g$.
 - g) $G = \mathbb{S}(X) = \{f : X \longrightarrow X \mid f \text{ es biyectiva}\}$, donde X es un conjunto no vacío y $f * g = f \circ g$.

Notación: Cuando $X = \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{S}(X)$ será notado \mathbb{S}_n .
 - h) $G = \mathbb{S}(\mathbb{Z})$ $f * g = f \circ g^{-1}$.
4. Pruebe que todos los grupos de 4 elementos son abelianos.
(Sugerencia: hacer las posibles tablas de operaciones).
5. Sea G un grupo. Sea (G^{op}, \cdot) tal que $G^{\text{op}} = G$ como conjunto, y el producto está dado por $g \cdot h = hg$. Mostrar que G^{op} es un grupo. Llamamos a G^{op} el *grupo opuesto* de G .
6. Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación \cdot sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$. Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo* de G y H y lo notamos $G \times H$.

7. a) Sea $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un grupo abeliano finito. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^n g_i = \sum_{g \in G: 2g=0} g.$$

b) Calcular $\sum_{a \in \mathbb{Z}_n} a$.

c) Calcular $\prod_{w \in G_n} w$.

8. Sea $(G, *)$ un grupo finito y sea $S \subset G$ un subconjunto no vacío. Pruebe que S es un subgrupo si y sólo si $xy \in S, \forall x, y \in S$.

9. Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G .

a) Pruebe que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.

b) Pruebe que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

c) ¿Es cierto que si $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ es un subgrupo de G , entonces $\exists i, j$ con $i \neq j$ tal que $H_i \subset H_j$?

10. Determine todos los subgrupos cíclicos de: $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{S}_3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

11. Pruebe que

$$\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$.

12. Sean G un grupo y $a \in G$. Pruebe que $C_G(a) = \{x \in G; xa = ax\}$ es un subgrupo de G .

13. Pruebe que si H es un subgrupo de \mathbb{Z} entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n \cdot \mathbb{Z}$.

14. Pruebe que si H es un subgrupo finito de \mathbb{C}^\times entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = G_n$.

15. Determine $\text{ord}(x)$ en los casos:

a) $G = \mathbb{S}_8 \quad x = (1\ 2)(5\ 6\ 7) \quad ; \quad x = (1\ 2\ 3\ 5)(1\ 3\ 7\ 8).$

b) $G = \mathbb{Z}_{12} \quad x = 2 \quad ; \quad x = 3 \quad ; \quad x = 4.$

c) $G = \mathcal{H} \quad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$

d) $G = S^1 \quad x = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n}).$

e) $G = \mathbb{D}_4 \quad x = r^2s \quad ; \quad x = r^3.$

f) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural.

16. Sea $x \in \mathbb{Z}_n$. Pruebe que $\text{ord}(x) = n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

17. a) Calcular el orden de todos los elementos de \mathbb{S}_3 .
 b) Sea $\sigma = (1\ 3\ 2)$, encontrar el subgrupo $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma) = \{r \in \mathbb{S}_3 \mid r\sigma = \sigma r\}$.
 c) Determine, si existe, un $\sigma \in \mathbb{S}_3$ tal que el subgrupo $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma)$ tenga orden 1, 2, 3, 6.
18. Pruebe que si G_1 y G_2 son grupos finitos, el orden de un elemento (g_1, g_2) en $G_1 \times G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g_1 y g_2 .
19. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m . Pruebe que existe un elemento de orden p en G .
20. Sean (G, \cdot) un grupo y $a, b \in G$
- a) Pruebe que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas
- i) $x \mapsto a \cdot x$ iii) $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$ v) $x \mapsto a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$
 ii) $x \mapsto a \cdot x \cdot b$ iv) $x \mapsto x^{-1}$
- b) Determine cuáles de estas aplicaciones son morfismos.
 c) Idem en el caso en que G sea abeliano.

21. Dados los grupos:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_2 \oplus G_4 & \mathbb{Z}_8 \\
 \mathbb{D}_4 & G_8 & \mathcal{H} & \mathcal{K}
 \end{array}$$

donde \mathcal{H} es el grupo definido en el Ejercicio 11 y $\mathcal{K} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ con $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ y $i \cdot j = k = -j \cdot i$. Determine cuáles son abelianos, cuáles son cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.

22. Determine si G y K son isomorfos en los casos:

- a) $G = \mathbb{Z}_4$ $K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
 b) $G = \mathbb{Z}_n$ $K = G_n$.
 c) $G = \mathbb{Z}_{10}$ $K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$.
 d) $G = \mathbb{Q}$ $K = \mathbb{R}$.
 e) $G = \mathcal{U}_{16}$ $K = \mathcal{H}$.
 f) $G = \mathcal{U}_{16}$ $K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.
 g) $G = \mathbb{S}_3$ $K = \mathbb{D}_3$.
 h) $G = \mathbb{A}_4$ $K = \mathbb{D}_6$.

23. Sea $f : G \rightarrow G$ un morfismo de grupos. Pruebe que $\text{ord}(f(x))$ divide a $\text{ord}(x)$ si $\text{ord}(x)$ es finito.
24. Sea $f : G \rightarrow L$ un epimorfismo. Determine para cuáles P_i vale:
 “ G verifica $P_i \Rightarrow L$ verifica P_i ”

- (P_1) tener n elementos. (P_6) todo elemento tiene orden finito.
 (P_2) ser finito.
 (P_3) ser conmutativo.
 (P_4) ser no conmutativo. (P_7) todo elemento tiene orden infinito.
 (P_5) ser cíclico.
25. Sea $f : G \longrightarrow L$ un monomorfismo. Determine para cuáles P_i del ejercicio anterior vale: " L verifica $P_i \Rightarrow G$ verifica P_i ".
26. a) Pruebe que $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.
 b) Determine $\text{Hom}(G_n, \mathbb{Z})$.
 c) Determine $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.
27. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z}_7, \text{ con } a \neq 0 \right\}$.
- a) Determine el orden de G .
 b) Para cada primo p que divide al orden de G hallar todos los elementos de G que tengan orden p .
28. Sea p un número primo mayor que 2. Se considera el conjunto
- $$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$
- Pruebe que G es un grupo no abeliano tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden p . ¿Qué pasa si $p = 2$?
29. a) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Pruebe que $\{a, b\}$ es un sistema de generadores de \mathbb{Z} si y sólo si $(a, b) = 1$.
 b) Pruebe que \mathbb{Z} tiene sistemas de generadores minimales de n elementos $\forall n \in \mathbb{N}$.
30. Sea $G = \text{GL}(2, 2)$. Determine $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4, 8.
31. a) Pruebe que son equivalentes:
 i) G es abeliano.
 ii) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.
 iii) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.
 b) Pruebe que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano.
32. Pruebe que
- a) $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \neq 0$.
 b) $\text{Hom}(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7) = 0$.
 c) $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.
 d) No existe un epimorfismo de \mathbb{Z} en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

33. Determine dos grupos G y K no isomorfos tales que $\text{Aut}(G) \simeq \text{Aut}(K)$.
34. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z}_4, \text{ con } (a, 4) = 1 \right\}$. Pruebe que G es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es $G \simeq \mathcal{H}$? ¿Es $G \simeq \mathbb{D}_4$?
35. Determine todos los subgrupos de \mathbb{S}_3 .
36. *a)* Pruebe que \mathbb{A}_4 no tiene subgrupos de orden 6.
b) Pruebe que $\mathbf{SL}(2, 3)$ no tiene subgrupos de orden 12.