

---

# ÁLGEBRA II

## Segundo Cuatrimestre — 2013

### Práctica 1

---

1. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $G_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ .
  - a) Pruebe que  $(G_n, \cdot)$  es un grupo abeliano y hallar  $z^{-1}$  para cada  $z \in G_n$ .
  - b) Pruebe que  $G_n$  es cíclico, es decir, que existe  $w \in G_n$  que satisface:  $\forall z \in G_n \exists k \in \mathbb{Z}$  tal que  $z = w^k$ .
2. Sea  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .
  - a) Pruebe que  $(S^1, \cdot)$  es un grupo abeliano y hallar  $z^{-1}$  para cada  $z \in S^1$ .
  - b) Determine si  $S^1$  es cíclico.
3. En cada uno de los siguientes casos determine si  $(G, *)$  es un grupo y, en caso afirmativo, determine si es abeliano:
  - a)  $G = \mathbb{Q}_{>0}$        $a * b = a \cdot b$ .
  - b)  $G = M_3(\mathbb{Z})$        $a * b = a \cdot b$ .
  - c)  $G = M_n(\mathbb{R})$        $a * b = a + b$ .
  - d)  $G = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det a = 1\}$        $a * b = a \cdot b$ .
  - e)  $G = End_K(V)$ , con  $V$  un  $K$ -espacio vectorial       $f * g = f \circ g$ .
  - f)  $G = \{f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \mid d(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$   
 $f * g = f \circ g$ .
  - g)  $G = \mathbb{S}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es biyectiva}\}$ , donde  $X$  es un conjunto no vacío y  $f * g = f \circ g$ .

**Notación:** Cuando  $X = \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{S}(X)$  será notado  $\mathbb{S}_n$ .

  - h)  $G = \mathbb{S}(\mathbb{Z})$        $f * g = f \circ g^{-1}$ .
4. Pruebe que todos los grupos de 4 elementos son abelianos.  
(Sugerencia: hacer las posibles tablas de operaciones).
5. Sea  $G$  un grupo. Sea  $(G^{\text{op}}, \cdot)$  tal que  $G^{\text{op}} = G$  como conjunto, y el producto está dado por  $g \cdot h = hg$ . Mostrar que  $G^{\text{op}}$  es un grupo. Llamamos a  $G^{\text{op}}$  el *grupo opuesto de  $G$* .
6. Sean  $G$  y  $H$  dos grupos. Consideremos la operación  $\cdot$  sobre el conjunto  $K = G \times H$  dada por  $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$ . Mostrar que  $K$  es un grupo. Llamamos a  $K$  el *producto directo de  $G$  y  $H$*  y lo notamos  $G \times H$ .

7. a) Sea  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  un grupo abeliano finito. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^n g_i = \sum_{g \in G: 2g=0} g.$$

b) Calcular  $\sum_{a \in \mathbb{Z}_n} a$ .

c) Calcular  $\prod_{w \in G_n} w$ .

8. Sea  $(G, *)$  un grupo finito y sea  $S \subset G$  un subconjunto no vacío. Pruebe que  $S$  es un subgrupo si y sólo si  $xy \in S, \forall x, y \in S$ .

9. Sea  $G$  un grupo y sean  $H_1$  y  $H_2$  dos subgrupos de  $G$ .

a) Pruebe que  $H_1 \cap H_2$  es un subgrupo.

b) Pruebe que  $H_1 \cup H_2$  es un subgrupo si y sólo si  $H_1 \subset H_2$  o  $H_2 \subset H_1$ .

c) ¿Es cierto que si  $H_1 \cup H_2 \cup H_3$  es un subgrupo de  $G$ , entonces  $\exists i, j$  con  $i \neq j$  tal que  $H_i \subset H_j$ ?

10. Determine todos los subgrupos cíclicos de:  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_5$ ,  $\mathbb{Z}_6$ ,  $\mathbb{S}_3$ ,  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  y  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ .

11. Pruebe que

$$\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un subgrupo de  $GL(2, \mathbb{C})$ .

12. Sean  $G$  un grupo y  $a \in G$ . Pruebe que  $C_G(a) = \{x \in G; xa = ax\}$  es un subgrupo de  $G$ .

13. Pruebe que si  $H$  es un subgrupo de  $\mathbb{Z}$  entonces existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $H = n \cdot \mathbb{Z}$ .

14. Pruebe que si  $H$  es un subgrupo finito de  $\mathbb{C}^\times$  entonces existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $H = G_n$ .

15. Determine  $ord(x)$  en los casos:

a)  $G = \mathbb{S}_8 \quad x = (1\ 2)(5\ 6\ 7) \quad ; \quad x = (1\ 2\ 3\ 5)(1\ 3\ 7\ 8)$ .

b)  $G = \mathbb{Z}_{12} \quad x = 2 \quad ; \quad x = 3 \quad ; \quad x = 4$ .

c)  $G = \mathcal{H} \quad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ .

d)  $G = S^1 \quad x = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$ .

e)  $G = \mathbb{D}_4 \quad x = r^2 s \quad ; \quad x = r^3$ .

f)  $G$  un grupo cualquiera y  $x = a^d$ , donde  $a \in G$  es un elemento de orden  $n$  y  $d$  es un número natural.

16. Sea  $x \in \mathbb{Z}_n$ . Pruebe que  $ord(x) = n$  si y sólo si  $(x, n) = 1$ .

17. a) Calcular el orden de todos los elementos de  $\mathbb{S}_3$ .  
 b) Sea  $\sigma = (1\ 3\ 2)$ , encontrar el subgrupo  $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma) = \{r \in \mathbb{S}_3 \mid r\sigma = \sigma r\}$ .  
 c) Determine, si existe, un  $\sigma \in \mathbb{S}_3$  tal que el subgrupo  $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma)$  tenga orden 1, 2, 3, 6.
18. Pruebe que si  $G_1$  y  $G_2$  son grupos finitos, el orden de un elemento  $(g_1, g_2)$  en  $G_1 \times G_2$  es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de  $g_1$  y  $g_2$ .
19. Sea  $p$  un número primo,  $m \in \mathbb{N}$  y sea  $G$  un grupo de orden  $p^m$ . Pruebe que existe un elemento de orden  $p$  en  $G$ .
20. Sean  $(G, \cdot)$  un grupo y  $a, b \in G$
- a) Pruebe que las siguientes aplicaciones de  $G$  en  $G$  son biyectivas y encontrar sus inversas
- |                                   |   |  |
|-----------------------------------|---|--|
| I) $x \mapsto a \cdot x$          | III) $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$ | v) $x \mapsto a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$ |
| II) $x \mapsto a \cdot x \cdot b$ | IV) $x \mapsto x^{-1}$                  |  |
- b) Determine cuáles de estas aplicaciones son morfismos.  
 c) Idem en el caso en que  $G$  sea abeliano.
21. Dados los grupos:
- |  |                                    |                           |                |
|--|------------------------------------|---------------------------|----------------|
| $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ | $\mathbb{Z}_2 \oplus G_4$ | $\mathbb{Z}_8$ |
| $\mathbb{D}_4$   | $G_8$                              | $\mathcal{H}$             | $\mathcal{K}$  |
- donde  $\mathcal{H}$  es el grupo definido en el Ejercicio 11 y  $\mathcal{K} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  con  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  y  $i \cdot j = k = -j \cdot i$ . Determine cuáles son abelianos, cuáles son cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.
22. Determine si  $G$  y  $K$  son isomorfos en los casos:
- a)  $G = \mathbb{Z}_4$        $K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .
  - b)  $G = \mathbb{Z}_n$        $K = G_n$ .
  - c)  $G = \mathbb{Z}_{10}$        $K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$ .
  - d)  $G = \mathbb{Q}$        $K = \mathbb{R}$ .
  - e)  $G = \mathcal{U}_{16}$        $K = \mathcal{H}$ .
  - f)  $G = \mathcal{U}_{16}$        $K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ .
  - g)  $G = \mathbb{S}_3$        $K = \mathbb{D}_3$ .
  - h)  $G = \mathbb{A}_4$        $K = \mathbb{D}_6$ .
23. Sea  $f : G \longrightarrow G$  un morfismo de grupos. Pruebe que  $\text{ord}(f(x))$  divide a  $\text{ord}(x)$  si  $\text{ord}(x)$  es finito.
24. Sea  $f : G \longrightarrow L$  un epimorfismo. Determine para cuáles  $P_i$  vale:  
 “ $G$  verifica  $P_i \Rightarrow L$  verifica  $P_i$ ”

(P<sub>1</sub>) tener  $n$  elementos.

(P<sub>2</sub>) ser finito.

(P<sub>3</sub>) ser commutativo.

(P<sub>4</sub>) ser no commutativo.

(P<sub>5</sub>) ser cíclico.

(P<sub>6</sub>) todo elemento tiene orden

finito.

(P<sub>7</sub>) todo elemento tiene orden in-

finito.

25. Sea  $f : G \rightarrow L$  un monomorfismo. Determine para cuáles  $P_i$  del ejercicio anterior vale: " $L$  verifica  $P_i \Rightarrow G$  verifica  $P_i$ ".

26. a) Pruebe que  $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq G_2$ .

b) Determine  $\text{Hom}(G_n, \mathbb{Z})$ .

c) Determine  $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$  para  $G$  un grupo de orden finito.

27. Sea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7, \text{ con } a \neq 0 \right\}$ .

a) Determine el orden de  $G$ .

b) Para cada primo  $p$  que divide al orden de  $G$  hallar todos los elementos de  $G$  que tengan orden  $p$ .

28. Sea  $p$  un número primo mayor que 2. Se considera el conjunto

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

Pruebe que  $G$  es un grupo no abeliano tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden  $p$ . ¿Qué pasa si  $p = 2$ ?

29. a) Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Pruebe que  $\{a, b\}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{Z}$  si y sólo si  $(a, b) = 1$ .

b) Pruebe que  $\mathbb{Z}$  tiene sistemas de generadores minimales de  $n$  elementos  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

30. Sea  $G = \mathbf{GL}(2, 2)$ . Determine  $|G|$  y encontrar subgrupos de  $G$  de orden 2, 4, 8.

31. a) Pruebe que son equivalentes:

i)  $G$  es abeliano.

ii) La aplicación  $f : G \rightarrow G$  definida por  $f(x) = x^{-1}$  es un morfismo de grupos.

iii) La aplicación  $f : G \rightarrow G$  definida por  $f(x) = x^2$  es un morfismo de grupos.

b) Pruebe que si  $x^2 = 1$  para todo  $x \in G$  entonces  $G$  es abeliano.

32. Pruebe que

a)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \neq 0$ .

b)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7) = 0$ .

c)  $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$ .

d) No existe un epimorfismo de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

33. Determine dos grupos  $G$  y  $K$  no isomorfos tales que  $\text{Aut}(G) \simeq \text{Aut}(K)$ .
34. Sea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z}_4, \text{ con } (a, 4) = 1 \right\}$ . Pruebe que  $G$  es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es  $G \simeq \mathcal{H}$ ? ¿Es  $G \simeq \mathbb{D}_4$ ?
35. Determine todos los subgrupos de  $\mathbb{S}_3$ .
36.
  - a) Pruebe que  $\mathbb{A}_4$  no tiene subgrupos de orden 6.
  - b) Pruebe que  $\mathbf{SL}(2, 3)$  no tiene subgrupos de orden 12.