FCEyN - UBA - Segundo Cuatrimestre 2013

Álgebra I
Práctica 5 - Polinomios

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\mathrm{Re}(z^{-1})$, $\mathrm{Im}(z^{-1})$, $\mathrm{Re}(-i \cdot z)$ e $\mathrm{Im}(i \cdot z)$.

i) $z = (2+i)(1+3\,i)$.

ii) $z = 5\,i(1+i)^4$.

iii) $z = (\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2(\overline{1-3\,i})$.

iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}\,i(1-i)^3$.

v) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^{179}$.

vi) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{-1}$.

vii) $z = \overline{1-3\,i}^{\,-1}$.

2. Dados $z = 1+3\,i$ y $w = 4+2\,i$, representar en el plano complejo los siguientes números

i) z.

ii) w.

iii) $z+w$.

iv) $z-w$.

v) $-z$.

vi) $2z$.

vii) $\frac{1}{2}w$.

viii) iz.

ix) $\overline{z}$.

x) $\overline{3z+2w}$.

xi) $\overline{iz}$.

xii) $|z|$.

xiii) $|2z|$.

xiv) $|z+w|$.

xv) $|z-w|$.

xvi) $|\overline{w-z}|$.

3. Calcular el grado y el coeficiente principal de $f \in \mathbb{Q}[X]$ en los casos

i) $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$.

ii) $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$.

iii) $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$.

4. Calcular el coeficiente de X^{20} de f en los casos

i) $f = (X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ en $\mathbb{Q}[X]$ y en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

ii) $f = (X - 3\,i)^{133}$ en $\mathbb{C}[X]$.

iii) $f = (X-1)^4(X+5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$ en $\mathbb{Q}[X]$.

iv) $f = X^{10}(X^5+4)^7$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

5. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$.

ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$.

iii) $(X+1)f^2 = X^3 + Xf$.

iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \mathrm{gr}(f) \cdot X^2 f$.

6. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$, $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

ii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4$, $g = 2X^3 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

iii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$, $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

iv) $f = X^5 + X^3 + X + 1$, $g = 2X^2 + 1$ en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

v) $f = X^n - 1$, $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

7. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$.

ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$.

iii) El resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

8. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in K[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in K[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod h$. Probar que

i) $\equiv \pmod h$ es una relación de equivalencia en $K[X]$.

ii) Si $f_1 \equiv g_1 \pmod h$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod h$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod h$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod h$.

iii) Si $f \equiv g \pmod h$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod h$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \pmod h$ y $r = 0$ ó $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(h)$.

9. Hallar el resto de la división de f por h para

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $h = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$, $h = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, $h = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

10. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $a \in K$. Probar que en $K[X]$ vale:

i) $X - a \mid X^n - a^n$.

ii) Si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$.

iii) Si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$.

Calcular los cocientes en cada caso.

11. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$.

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$.

iii) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3$, $g = X^4 + 2X + 1$.

12. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

13. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$.

14. i) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.

ii) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 4 cuyas raíces complejas son exactamente 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.

15. *Evaluación de polinomios.–* Sea $f = a_n x^n + \cdots + a_0 \in K[X]$. Queremos calcular la cantidad de sumas y productos necesarios para calcular $f(\alpha)$, $\alpha \in K$, por medio de los siguientes algoritmos:

i) *Algoritmo ingenuo:* Se calculan todos los α^k recursivamente, guardando todos los resultados, luego se multiplica cada uno por su coeficiente a_k y se suma. ¿Cuántas sumas y cuántos productos se utilizaron?

ii) *Método de Horner* (por el matemático inglés William George Horner, 1786-1837, aunque también era conocido por el matemático italiano Paolo Ruffini, 1765-1822, y mucho antes en realidad por el matemático chino Qin Jiushao, 1202-1261). Es el algoritmo que describe el mecanismo siguiente:

$$\begin{aligned} n = 2: &\quad f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha a_2) \\ n = 3: &\quad f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha a_3)) \\ n = 4: &\quad f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha(a_3 + \alpha a_4))) \end{aligned}$$

Y en general

$$f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha(a_3 + \cdots + \alpha(a_{n-2} + \alpha(a_{n-1} + \alpha a_n)) \cdots))).$$

¿Cuántas sumas y cuántos productos se utilizaron?

16. Resolver en $\mathbb{C}$ las ecuaciones cuadráticas

i) $X^2 - 2X + 10 = 0$.

ii) $X^2 = 3 + 4\,i$.

iii) $X^2 + (1 + 2\,i)\,X + 2\,i = 0$.

iv) $X^2 + (3 + 2\,i)\,X + 5 + i = 0$.

17. Resolver en $\mathbb{Q}$ las ecuaciones cuadráticas

i) $X^2 + 6X - 1 = 0$.

ii) $X^2 + X - 6 = 0$.

18. Resolver en $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ las ecuaciones cuadráticas

i) $X^2 + 6X + 1 = 0$.

ii) $X^2 + X + 6 = 0$.

19. i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

20. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1$.

ii) $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2, \quad a = \frac{1}{2}$.

iii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i$.

iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1), \quad a = 2$.

v) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3, \quad a = 2$.

21. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + a$ tiene sólo raíces simples en $\mathbb{C}$.

22. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f = X^{2n+1} - (2n + 1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple en $\mathbb{C}$.

23. i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X - 1)^2$.

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X - 1)^3$.

24. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz *doble* de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2 + 3a)X - 2a$.

25. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ tiene todas sus raíces simples.

26. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2 f_n', \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $\mathrm{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

27. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f_n'), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que i es raíz *doble* de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

28. i) Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad k de f si y sólo si es raíz de multiplicidad $k - 1$ de $(f : f')$.

ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que si f es irreducible, entonces tiene todas sus raíces (en $\mathbb{C}$) simples.

29. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3+\sqrt{3}\,i$.
ii) $(2+2\,i)(\sqrt{3}-i)$.
iii) $(-1-i)^{-1}$.
iv) $(-1+\sqrt{3}\,i)^{5}$.
v) $(-1+\sqrt{3}\,i)^{-5}$.
vi) $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}$.

30. Graficar en el plano complejo

i) $\{z\in\mathbb{C}-\{0\}\,/\,|z|\geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4}\leq \arg(z)\leq\frac{2\pi}{3}\}$.
ii) $\{z\in\mathbb{C}-\{0\}\,/\,\arg(-i\,z)>\frac{\pi}{4}\}$.
iii) $\{z\in\mathbb{C}-\{0\}\,/\,|z|<3 \text{ y } \arg(z^4)\leq\pi\}$.

31. i) Determinar la forma binomial de $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{17}$.

ii) Determinar la forma binomial de $(-1+\sqrt{3}\,i)^n$ para cada $n\in\mathbb{N}$.
iii) Hallar todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3}-i)^n=2^{n-1}(-1+\sqrt{3}\,i)$.

32. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios

i) X^6-8.
ii) X^4+3.
iii) $X^7-(-1+i)$.
iv) $X^{11}-2\,i\,(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)^{-1}$.
v) $X^6-(2-2i)^{12}$.
vi) $X^{12}+X^6+1$.

33. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) X^3-1.
ii) X^4-1.
iii) X^6-1.
iv) X^8-1.

34. Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) X^6-8.
ii) X^4+3.
iii) $X^{12}+X^6+1$.

35. Sea $n\in\mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}X^k$ tiene todas sus raíces complejas simples.

36. i) Hallar todas las raíces racionales de

(a) $2X^5+3X^4+2X^3-X$.
(b) $X^5-\frac{1}{2}X^4-2X^3+\frac{1}{2}X^2-\frac{7}{2}X-3$.
(c) $3X^4+8X^3+6X^2+3X-2$.

ii) Probar que $X^4+2X^3-3X^2-2$ no tiene raíces racionales.

37. i) Hallar todas las raíces complejas de $f=X^5-4X^4-X^3+9X^2-6X+1$ sabiendo que $2-\sqrt{3}$ es raíz de f.

ii) Hallar $f\in\mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1+2\sqrt{5}$ y a $3-\sqrt{2}$ como raíces.
iii) Sea $f\in\mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional.
iv) Sea $f\in\mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1+\sqrt{2})=3$, $f(2-\sqrt{3})=3$ y $f(1+\sqrt{5})=3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2-2X-1)(X^2-4X+1)(X^2-2X-4)$.

38. Factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

i) $X^4-X^3+X^2-3X-6$.
ii) X^4-6X^2+1.
iii) $X^5-X^3+17X^2-16X+15$ sabiendo que $1+2\,i$ es raíz.
iv) $X^5+2X^4+X^3+X^2-1$ sabiendo que $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz.

v) $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ sabiendo que $\sqrt{2}\,i$ es raíz múltiple de f.

vi) $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

39. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a+4)X^3 + (4a+5)X^2 - (5a+2)X + 2a$ tenga a a como raíz *doble*. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

40. i) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

ii) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.

41. Probar que $\prod_{\omega \in G_n} \omega = (-1)^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

42. Determinar las raíces n-ésimas *primitivas* de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12.

43. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solo si $\overline{w}$ lo es.

44. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.

45. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0.$ ii) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0.$

46. i) Calcular la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15$.

ii) Calcular la suma de las raíces p-ésimas primitivas de la unidad para p primo.

47. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$

48. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad.

Para cada valor de $a \in \mathbb{Q}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.