FCEyN - UBA - Segundo Cuatrimestre 2013

Álgebra I
Práctica 1 - Conjuntos

Si A es un subconjunto de un conjunto referencial V, denotaremos por A' al complemento de A respecto de V.

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

i) $1 \in A$ ii) $\{1\} \subseteq A$ iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ iv) $\{1, 3\} \in A$ v) $\{2\} \in A$

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

i) $3 \in A$
ii) $\{3\} \subseteq A$
iii) $\{3\} \in A$
iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$
v) $\{1, 2\} \in A$
vi) $\{1, 2\} \subseteq A$
vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$
viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$
ix) $\emptyset \in A$
x) $\emptyset \subseteq A$
xi) $A \in A$
xii) $A \subseteq A$

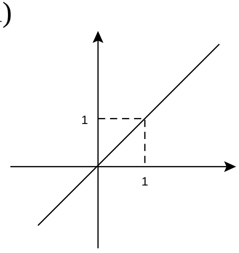
3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

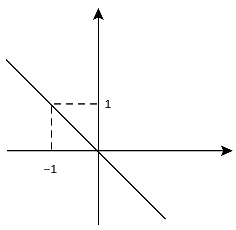
i) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
ii) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < |x| < 3\},\ B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 3\}$
iv) $A = \{\emptyset\},\ B = \emptyset$

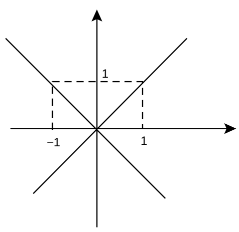
4. i) Describir a los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ por comprensión mediante *una sola* ecuación:

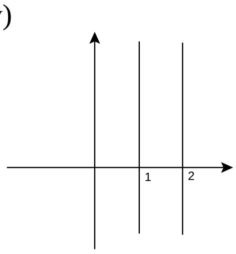
$$\{-3, 1, 5\} \quad , \qquad (-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$$

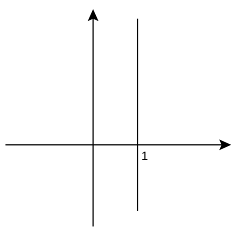
ii) Describir a los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ por comprensión mediante *una sola* ecuación:

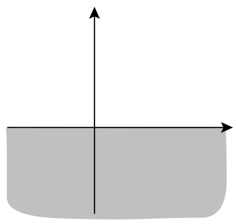
i)


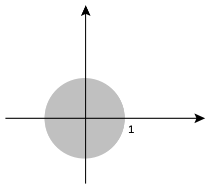
ii)


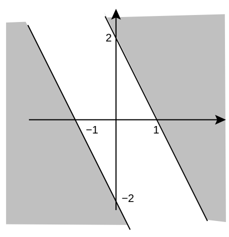
iii)


iv)


v)


vi)


vii)


(*) viii)


5. Si un conjunto tiene n elementos ¿cuántos subconjuntos de $n-1$ elementos posee?

6. Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{-1, 3-5, 7, -8, 11\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ y $A \triangle B$, y sus cardinales.

7. Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n$ es múltiplo de $15\}$, determinar el complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V \,/\, n \geq 132\}$, y su cardinal.

8. ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

9. Dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar

i) $A \cap (B \triangle C)$ ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ iii) $A' \cap B' \cap C'$

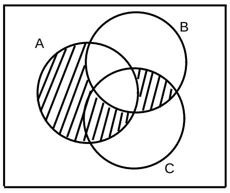
10. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)'$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)'$ en términos de uniones y complementos.

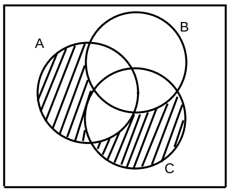
11. Dados subconjuntos finitos A, B, C de un conjunto referencial V, calcular $\#(A \cup B \cup C)$ en términos de los cardinales de A, B, C y sus intersecciones.

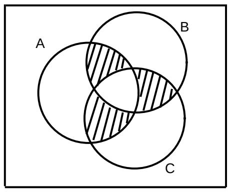
12. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

i) $(A \cup B') \cap C$ ii) $A \triangle (B \cup C)$ iii) $A \cup (B \triangle C)$

13. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

i)


ii)


iii)


14.

i) Una compañía tiene 420 empleados de los cuales 60 obtuvieron un aumento y un ascenso, 240 obtuvieron solo un aumento y 115 obtuvieron solo un ascenso. ¿Cuántos empleados no obtuvieron ni aumento ni ascenso?

ii) En el listado de inscripciones de un grupo de 150 estudiantes, figuran 83 inscripciones en Análisis y 67 en Algebra. Además se sabe que 45 de los estudiantes se anotaron en ambas materias. ¿Cuántos de los estudiantes no están inscriptos en ningún curso?

iii) En un instituto de idiomas donde hay 110 alumnos, las clases de inglés tienen 63 inscriptos, las de alemán 30 y las de francés 50. Se sabe que 7 alumnos estudian los tres idiomas, 30 solo estudian inglés, 13 solo estudian alemán y 25 solo estudian francés. ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas? ¿Cuántos inglés y alemán pero no francés? ¿Cuántos estudian solo francés?

15. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$

ii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)'$

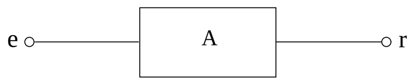
iv) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

16. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
iii) $A - (A \triangle B) = A \cap B$
iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$
v) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \triangle B = B \cap A'$
vi) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; B' \subseteq A'$
vii) $C \subseteq A$
$\Rightarrow\; (A \cup B) \cap C' = (B - C) \cup (A \triangle C)$
viii) $A \cap C = \emptyset \;\Rightarrow\; A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

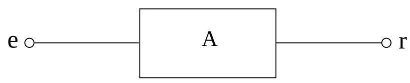
17. Si se quiere probar mediante una tabla de verdad un enunciado como en los ejercicios anteriores que involucra n conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, ¿cuántas filas va a tener la tabla de verdad?

18. Un emisor e envía señales de diferentes frecuencias a un receptor r a través de un cable conductor. Se dipone de filtros que dejan pasar a unas señales sí y a otras no, dependiendo de sus frecuencias.

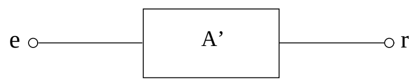


filtro

Cada uno de estos filtros tiene una llave que al accionarla invierte el espectro de frecuencias que el filtro deja pasar.

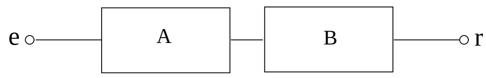


filtro

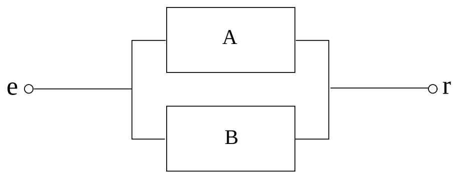


filtro invertido

Los filtros pueden conectarse en serie o en paralelo para formar nuevos filtros.



conexión serie



conexión paralela

Se considera ahora en el conjunto de todas las frecuencias y se identifica a cada filtro con el subconjunto formado por aquellas fecuencias que éste deja pasar. Observar que con la identificación recién establecida, se tienen las siguientes correspondencias:

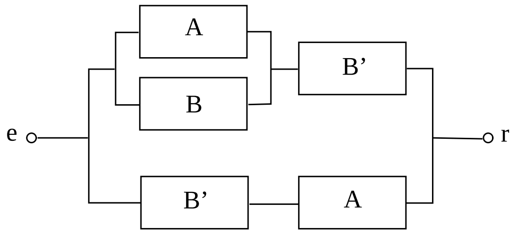
Filtro invertido $\leftrightarrow$ Complemento , Conexión serie $\leftrightarrow$ Intersección , Conexión paralela $\leftrightarrow$ Unión

i) Diseñar circuitos para la construcción de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B y C

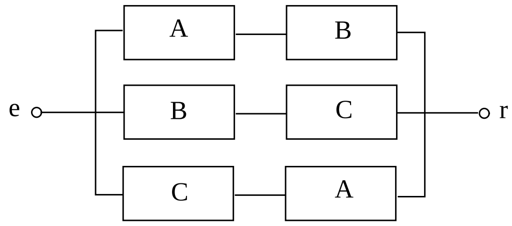
(a) $(A \cup B)'$
(b) $(A \cap B)'$
(c) $A \cup (B \cap C)$
(d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
(e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
(f) $A \triangle B$

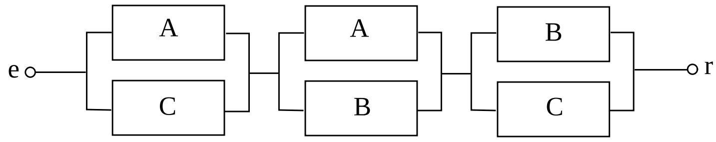
ii) Diseñar circuitos para la construcción de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B, C, D
(a) $\big(D \triangle (A \cap B)\big) - C$
(b) $\big((D \cap A) \triangle (D \cap B')\big) \cup \big(A \cap B' \cap (C - D)\big)$
(c) $(A' \cap B \cap C) \triangle (D' \cap C)$

iii) Rediseñar el siguiente circuito construyendo otro equivalente pero que utilice únicamente dos filtros. ¿A qué conjunto corresponde el filtro resultante?



iv) ¿Son los siguientes circuitos equivalentes? En caso afirmativo escribir la identidad de conjuntos que resulta y demostrarla.





19. Sean p, q proposiciones Verdaderas o Falsas. Comparar las tablas de verdad de

$$p \Rightarrow q, \qquad \sim q \Rightarrow \sim p, \qquad \sim p \vee q, \qquad \sim (p \wedge \sim q)$$

(Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ se dice que es una demostración por contrarecíproco, mientras que cuando se prueba en su lugar que $p \wedge \sim q$ es falso (lleva a una contradicción), se dice que es una demostración por el absurdo).

20. Decidir si son verdaderas o falsas

i) (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5$
(b) $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 5$
(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \ \vee \ n \leq 8$
(d) $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \ \wedge \ n \leq 8$
(e) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m > n$
(f) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n$

ii) Negar las proposiciones anteriores (en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto a la original).

iii) Decidir si las proposiciones siguientes tienen el mismo valor de verdad

(a) $\exists x, \exists y, p(x, y)$ y $\exists y, \exists x, p(x, y)$
(b) $\forall x, \forall y, p(x, y)$ y $\forall y, \forall x, p(x, y)$
(c) $\exists x, \forall y, p(x, y)$ y $\forall y, \exists x, p(x, y)$
(d) $\forall x, p(x)$ y $\nexists x, \sim p(x)$

Para los que no lo tienen, dar un contraejemplo.

21. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

i) $A = \{1\}$
ii) $A = \{a, b\}$
iii) $A = \{1, \{1, 2\}\}$
iv) $A = \{a, b, c\}$
v) $A = \{1, a, \{-1\}\}$
vi) $A = \emptyset$

22. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

23. Si A es un conjunto con n elementos, ¿cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{P}(A)$?

24. i) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

ii) Sean A, B y C conjuntos. Probar que

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

(d) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

25. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿cuántos elementos tiene $A \times B$? ¿Cuántas relaciones de A en B hay? ¿Y de B en A?

26. Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos, con $k \in \mathbb{N}$. Se define el conjunto $A_1 \times \cdots \times A_k$ como el conjunto de k-uplas ordenadas con primer elemento en A_1, segundo elemento en A_2, etc. Es decir:

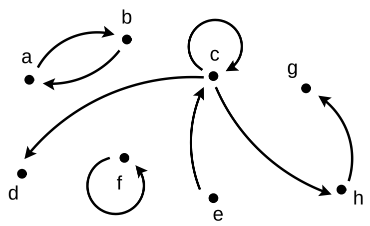
$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) : \ a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k\}.$$

Si $A_1, \dots, A_k$ son todos conjuntos finitos, ¿cuál es el cardinal de $A_1 \times \cdots \times A_k$?

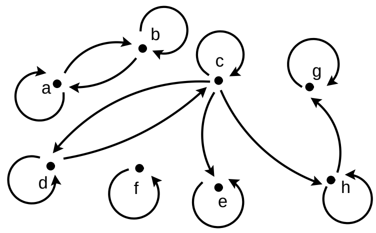
27. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista ¿cuántos formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?

28. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

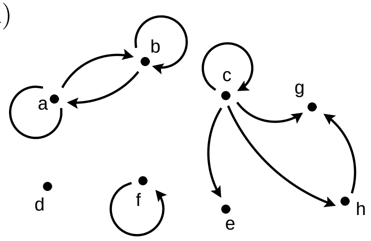
i)



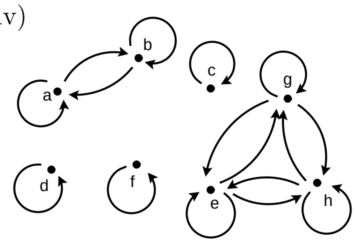
ii)



iii)



iv)

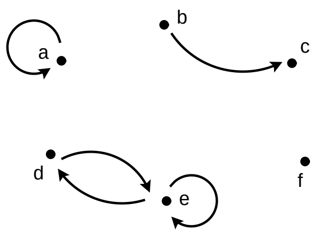


29. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior.

30. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

i) reflexiva,
ii) simétrica,
iii) transitiva,
iv) reflexiva y simétrica,
v) simétrica y transitiva,
vi) reflexiva y transitiva

y finalmente, de equivalencia.

31. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$
iv) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b \text{ es par}\}$
v) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, |a| \leq |b|\}$
vi) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a
vii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$

32. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas
ii) de equivalencia y de orden

¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?

33. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a, a),(b, b),(c, c),(d, d),(e, e),(f, f),(a, b),(b, a),(a, f),(f, a),(b, f),(f, b),(c, e),(e, c)\}$$

hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$.

34. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\big\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\big\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

35. Sea en el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros la relación de equivalencia dada por la paridad: dos números están relacionados si y solo si tienen la misma paridad (son ambos pares o ambos impares). ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

36. Sea en el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros la siguente relación: dos números están relacionados si terminan en el mismo dígito. Verificar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

37. Sea en el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ la relación de equivalencia dada por el cardinal: dos subconjuntos están relacionados si y solo si tienen el mismo cardinal. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

38. i) Hallar todas las particiones de los conjuntos $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A, B y C?

ii) Si $B(n)$ nota la cantidad de particiones que tiene un conjunto de n elementos, ¿puede expresar $B(4)$ en función de $B(1)$, $B(2)$ y $B(3)$? ($B(n)$ se llama el *n-ésimo número de Bell*, por Eric Temple Bell, 1883–1960, matemático y autor de ciencia ficción escocés.)

39. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
iii) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,/\, a = 2b - 3\}$
iv) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, a + b \text{ es divisible por } 5\}$

40. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

i) ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ se pueden determinar?

ii) ¿Y si $10 \notin \operatorname{Im}(f)$?

iii) ¿Y si $10 \in \operatorname{Im}(f)$?

iv) ¿Y si $f(1) \in \{2, 4, 6\}$?

41. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$

ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^3 - 5$

iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$

iv) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (2x, x^2, x - 7)$

v) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

vi) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

vii) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b$

viii) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

42. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

i) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ se pueden definir

ii) ¿Y si se pide que $f(\{1, 2, 3\}) = \{12, 13, 14\}$?

43. ¿De cuántas formas se pueden permutar los números $1, 2, 3, 4, 5$ y 6? (Por ejemplo, todas las permutaciones de $1, 2, 3$ son $1, 2, 3$; $1, 3, 2$; $2, 1, 3$; $2, 3, 1$; $3, 1, 2$ y $3, 2, 1$.)

44. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

i) ¿Cuántas funciones inyectivas $f : A \to B$ se pueden definir?

ii) ¿Y si se pide además que $f(1)$ sea par?

iii) ¿Y si se pide además que $f(1)$ y $f(2)$ sean pares?

45. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ se pueden definir si se pide que $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$?

46. i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n + 1 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n, m) = n(m+1),$$

calcular $(f \circ g)(3, 4)$, $(f \circ g)(2, 5)$ y $(f \circ g)(3, 2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{N},\ g(n) = \sqrt{n},$$

hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(n) = 13$ y tales que $(f \circ g)(n) = 15$.

47. Hallar $f \circ g$ en los casos

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 18$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 3$

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x^2 - 18$

iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n+1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n) = 4n$

iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x) = (x+5, 3x)$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(n) = \sqrt{n}$

48. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ denota la función identidad del conjunto $\mathbb{N}$.

49. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \longrightarrow C$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones entonces valen

i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva

iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva

iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva

v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva

50. Sea B el conjunto de todas las expresiones de la forma

$$b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$$

en las que cada b_i es o bien 0 o bien 1. Los elementos de B se llaman *bytes*. Cada una de las cifras de un byte es un *bit* (cada byte tiene 8 bits). Los bits se identifican por su posición dentro del byte y están numerados en orden descendente de 7 a 0 (el bit de la derecha es el número 0 y el de la izquierda, el 7).

Se consideran las siguientes funciones de B en B:

i) R (por *right*): desplaza cada bit un lugar hacia la derecha, pone un 0 en el bit 7 y descarta el bit 0.

ii) L (por *left*): desplaza cada bit un lugar hacia la izquierda, pone un 0 en el bit 0 y descarta el bit 7.

iii) A_b (por *and*) efectúa un 'y' lógico ($\wedge$) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$)

iv) O_b (por *or* efectúa un 'o lógico'($\vee$) bit a bit con con un byte $b \in B$ dado ($0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$, $1 \vee 1 = 1$)

v) X_b (por *xor*) efectúa un 'o lógico exclusivo' ($\triangle$) bit a bit con con un byte $b \in B$ dado ($0 \triangle 0 = 0$, $0 \triangle 1 = 1$, $1 \triangle 0 = 1$, $1 \triangle 1 = 0$)

Ejemplo: $R(10100110) = 01010011$, $L(10100110) = 01001100$, y si $b = 11110000$, $A_b(10100110) = 10100000$, $O_b(10100110) = 11110110$ y $X_b(10100110) = 01010110$.

Calcular $R \circ L$, $L \circ R$, y dado $b \in B$, $A_b \circ A_b$, $A_b \circ O_b$, $O_b \circ A_b$, $X_b \circ X_b$. Solamente una de estas funciones es biyectiva; descubrir cuál y encontrar su inversa.