

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA:

### Algebra I - 2do Cuatrimestre 2013

Final – 27/12/2013

1. Sea  $G_{20}$  el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y  $G_4$  el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea  $\sim$  la relación en  $G_{20}$  definida por

$$a \sim b \iff a = \omega b, \text{ para algún } \omega \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

- Probar que  $\sim$  es una relación de equivalencia.
- ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?

2. Sea  $n$  un número natural  $\geq 2$  que no es múltiplo de 4. Probar que la cifra de las unidades de

$$2^{n-1}(2^n - 1)$$

es 6 u 8.

3.
  - Hallar los restos de dividir a  $7 \cdot 109 + 2^{110}$  y a  $3 \cdot 109 - 2^{109}$  por 13.
  - Sea  $n \in \mathbb{N}$  impar. Determinar los posibles valores de  $(7n + 2^{n+1} : 3n - 2^n)$  y para cada valor de  $d$  hallado, exhibir un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $(7n + 2^{n+1} : 3n - 2^n) = d$ .

4.
  - Hallar todos los  $a, b \in \mathbb{Z}$  para los cuales el polinomio

$$X^5 + 15aX^4 + 12bX^3 - 18X^2 - 1$$

tiene al menos una raíz racional.

- Probar que cualesquiera sean  $a, b$  hallados en el inciso anterior, esa raíz racional es única y simple.

5. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Determinar el resto de dividir  $n^{2n}$  por 5 en términos de una congruencia adecuada de  $n$ .

**Justifique todas sus respuestas**

*Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen*