1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre:
Libreta:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2011
Final – 20/12/2011

---

1. Se define la relación $\Re$ siguiente en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n_1, m_1) \Re (n_2, m_2) \iff n_1 \mid n_2 \text{ y } m_2 \mid m_1.$$

   - Probar que $\Re$ es una relación de orden.
   - Calcular la cantidad de elementos $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que satisfacen simultáneamente que

$$(2, 2^5 3^{18}) \Re (n, m) \quad \text{y} \quad (n, m) \Re (2^{10}, 6).$$

---

2. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Determinar los posibles restos de dividir por 220 a

$$2a^{13^{10}} - 2a.$$

---

3. Un número natural a se dice *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores propios positivos. Por ejemplo, 6 es un número perfecto, dado que $6 = 1 + 2 + 3$.

   Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Probar que si $2^n - 1$ es un número primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es un número perfecto.

---

4. Determinar todos los polinomios de la forma

$$X^4 + iX^3 + 2X^2 + aiX + b$$

   con $a, b \in \mathbb{Z}$ *no nulos* y *coprimos* que admiten al menos una raíz racional. Para cada par de valores hallado factorizar el polinomio obtenido en $\mathbb{C}[X]$.

---

5. Sea p un número primo. ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen